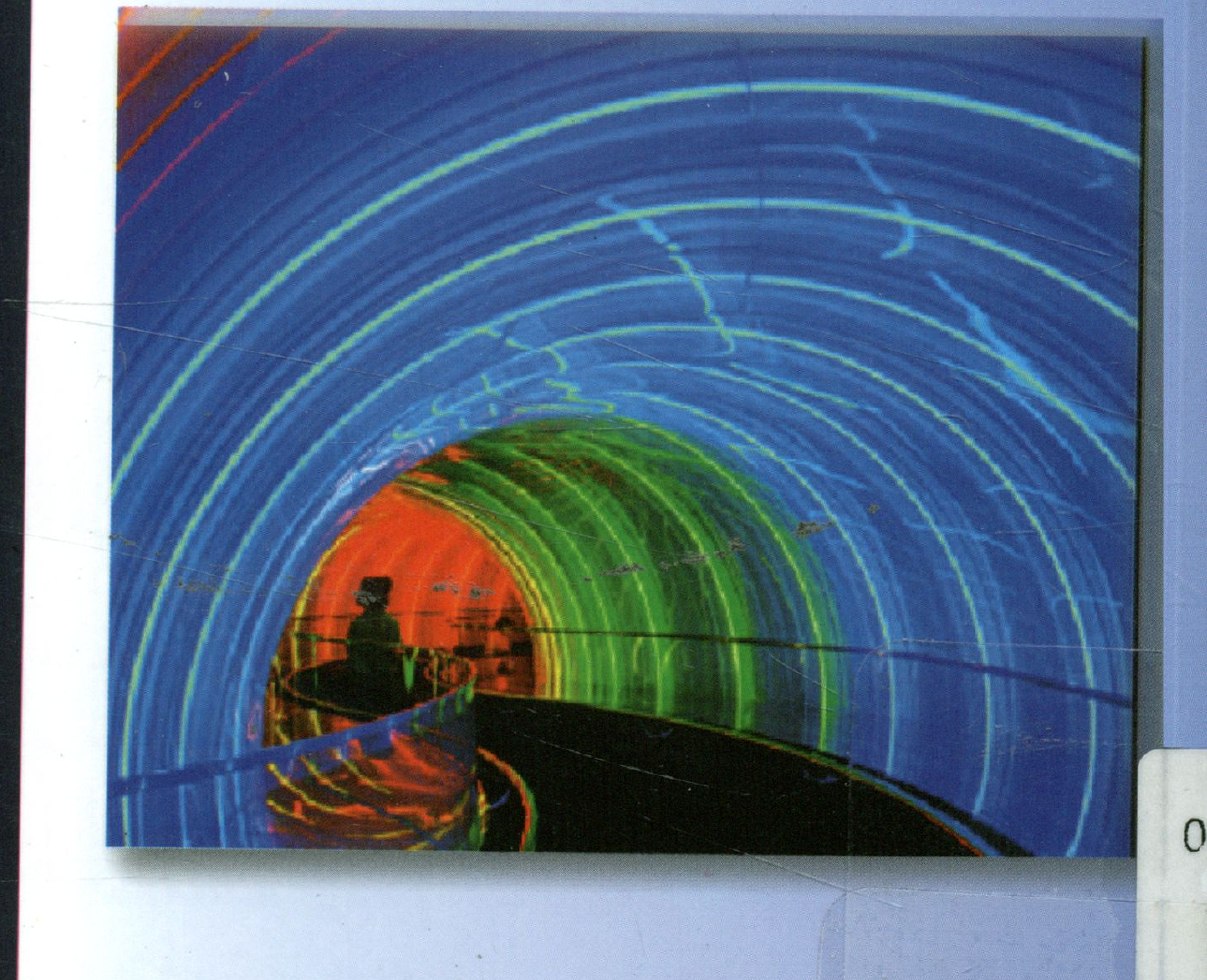
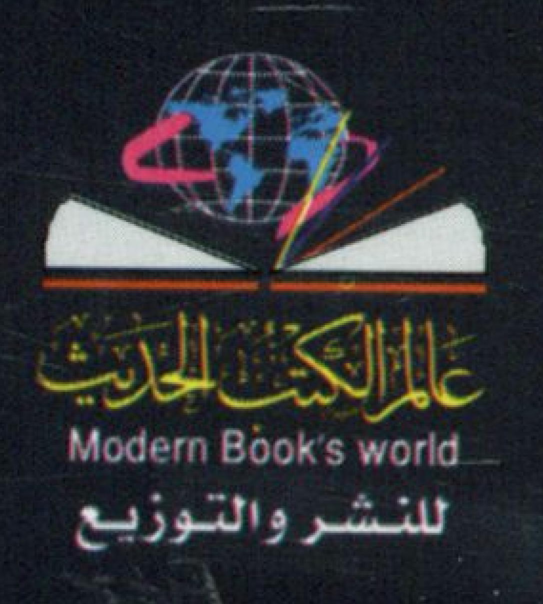
الحوسبة الكمية



الدكتور
محمد حبيب بركات
و
مروة محمد صخرية



عالم الكتب الحديث
Modern Book's world
للنشر والتوزيع

الحوسبة الكمية

الدكتور محمد حبيب بركات و مـروة محـمـد صخـريـة

عالم الكتب الحديث
Modern Books' World
إربد- الأردن
2014

الكتاب

الحوسبة الكمية

تأليف

محمد حبيب بركات ومروة محمد صخرية

الطبعة

الأولى، 2014

عدد الصفحات: 226

القياس: 17×24

رقم الإيداع لدى المكتبة الوطنية

(2013/9/3142)

ISBN 978-9957-70-801-6

الناشر

عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع

إربد- شارع الجامعة

تلفون: (27272272- 00962)

خلوي: 0785459343

فاكس: 27269909- 00962

صندوق البريد: (3469) الرمزي البريدي: (21110)

E-mail: almalktob@yahoo.com

almalktob@hotmail.com

www.almalkotob.com

الفرع الثاني

جدارا للكتاب العالمي للنشر والتوزيع

الأردن- العبدلي- تلفون: 5264363/ 079

مكتب بيروت

روضة الغدير- بناية بزي- هاتف: 471357 1 00961

فاكس: 475905 1 00961

إهداء

إلى وجع الأمة...إلى جرحها النازف....

إلى

القدس و بغداد

إلى شباب الأمة العربية....حافظوا على تراث أمتكم ومكانتها

بين الأمم

إلى

أطفال الأمة العربية ....الأمل...البراءة....الحياة...

أعانكم الله

المحتويات

مقدمة المترجمان

بسم الله الرحمن الرحيم

من دواعي سرور الانسان العربي أن يكون قادرا على الاسهام بما يمكن أن يكون لبنة في البناء الشامخ الذي خلفه المخلصين لهذه الأمة العريقة في تراثها وقيمها وأصالتها. وأن يستطيع من بين الآلام التي تعتصر قلبه أن يتذكر التاريخ فيساهم بما يستطيع من أجل الحفاظ على كينونة هذه الأمة ليس من باب العصبية القومية إنما حفاظا على لغة كتاب الله ولغة أهل الجنة وبالتالي المساهمة في بقاء هذه اللغة حية مواكبة لمستجدات العلوم. ورغم أن هذا العمل ليس من واجب علماء الأمة فقط ،وإن كان لهم الدور الأكبر، إنما هو من واجب كل البررة الذين أنجبتهم أمهاتهم أحرارا يرفضون الذل والخنوع ومسخ الهوية، الصفات التي يحاول أعداء هذه الأمة أن يجعلوها خصالا حميدة في الجيل الحالي والأجيال القادمة. فهذه المرحلة التاريخية هي من أصعب المراحل التي تمر على أمتنا ونحن نعيش تفاصيل الأحداث بين مصدقين لما يحدث وغير مصدقين يلهينا البحث عن لقمة العيش لنا ولأطفالنا عن التأمل في مصير هذه الأمة منقادين من حيث لا نعلم لما يصوغه الإعلام المحلي والأجنبي من أفكار تخص عولمة التعليم واللغة والثقافة وهي أمور إن حدثت إنما ستقتلع الذات وتطمس الهوية وتلغيها وتستبدلها. فلغتنا الجميلة الحية تعاني اليوم من محاولات الإقصاء عن الجامعات والمعاهد وربما يأتي اليوم الذي يحاول فيه وزراء التربية في بلداننا من إهمالها حتى في مراحل التعليم الأساس!!!! والهدف من وراء ذلك هو ما يريده أعداء الأمة في أن تنشأ أجيال لا ذاكرة لها، ولا تأريخ ولا ماضي ولا وطن ولا حاضر ولا مستقبل....

يسرنا أن نقدم للقارئ العربي أول كتاب يصدر في وطننا العربي في أحدث موضوع ألا وهو الحاسب الكمي الذي يأمل الباحثون في مختلف بقاع الأرض أن يشكل ثورة حقيقية في عالم الحاسب. الفكرة ببساطة هي استخدام أفكار الفيزياء الكمية لصنع حاسب يختلف كليا عن الكيفية التي يعمل بها حاسب اليوم. أنهم يحاولون صنع حاسب لا وجود فيه للدارات التكاملية، أو بمعنى أوضح لا وجود لأشباه الموصلات فيه إنما يعمل بالذرات التي ستتشكل البوابات منها. ومن يحكم تصرف الذرات غير الفيزياء الكمية؟!!!

إن معظم الكتب أو البحوث المتعلقة بالحوسبة الكمية تتطلب (أو تفترض) معرفة مسبقة لمجالات معينة مثل الجبر الخطي أو الفيزياء. ويمكننا القول بان معظم المؤلفات المتوفرة حاليا صعبة الفهم لشريحة واسعة من المتحمسين للحاسب الكمي، أو الراغبين فعلا بالحاسب الكمي, إن هذا الكتاب يحاول أن يلامس الحوسبة الكمية من الأساس حتى القمة بطريقة سهلة و مقروءة. إنه يحتوي على الكثير من خلفية الرياضيات والفيزياء وعلم الحاسب التي سوف يحتاجها القارئ.

و للأمانة العلمية فإن كتاب "الحوسبة الكمية و المعلومات الكمية " المؤلف من قبل Michael A.Nielsen و Isaac L.Chuang الذي يكتب اختصارا QCQI يشكل مرجعا أساسيا لهذا العمل إضافة إلى مواقع مدرجة آخر الكتاب.

يتطرق الفصل الأول إلى أسس الحاسب الكلاسيكي التي يحتاجها الواحد منا لفهم الركائز الأساسية التي يستند عليها مبدأ عمل الحاسب الكلاسيكي (أي الحاسب الذي بين أيدينا اليوم). أما الفصل الثاني فيتطرق لأسس فيزياء الكم. وبالأخص تلك الأفكار التي نحتاجها لفهم مبدأ عمل الحاسب الكمي. وبما أن فيزياء الكم تحتاج من الرياضيات المتقدمة الكثير إلا أنه تم تناول معظم المفاهيم الرياضية بما يغني القارئ ويكون عنده أساسا جيدا لفهم الفصول اللاحقة. الفصل الرابع يدخل في موضوع الحوسبة الكمية ليعطي أسسها وبعض من تاريخ تطورها. ثم يختم الكتاب بفصلين يتناولان أسس نظرية المعلومات والخوارزميات الكمية وفصل قصير عن استخدام أجهزة الميكانيك الكمي.

كان المترجم الثاني قد شرع في العمل في مشروع ماجستير يتعلق بدراسة سبل الحفاظ على التشاكه في حاسب الأيونات الأسيرة لكن الظروف شاءت أن لا يكمل مشواره فحسبت أن هذا العمل تقديرا لجهوده التي ضاعت بسبب ظروف قاهرة.

يسجل المترجم الأول شكره وتقديره لأبنه يوسف (الأول ثانوي) على تصميمه للغلاف ولروعته وعدم تململه، ولأبنته فرح (التاسع) على مساعدتها في طبع بعض الفصول وتشجيعها المستمر وروعتها.

نأمل أن يستفيد القارئ العربي من هذا الكتاب الذي ربما يكون النواة الأولى لعدد من الكتب القادمة في موضوع الحوسبة الكمية إن شاء الله.

الفصل الأول

المقدمة Introduction

1-1 ما هي الحوسبة الكمية ؟

في الوقت الراهن هناك اتجاهين أساسيين لتقاطع الفيزياء الحديثة مع علم الحاسب وعلم المواد material science. الأول هو الطرقة االتقليلدية التي يتواصل فيها الكفاح من أجل زيادة عدد مكونات الدارات التكاملية chip. وهذا الاتجاه هو محط اهتمام النانوتكنولوجي nanotechnology وهو العلم الذي يستخدم مقياس النانو (10^{-9}m) لقياس أحجام الأجهزة الإلكترونية. لقد حاول الباحثون منذ عقد الثمانينات ابتكار أجهزة تعمل بالكترونات مفردة كي تحل محل أجهزة MOSFETS الحديثة وهي اختصار للعبارة: (metal-oxide-semiconductor-field-effect-transistor)
هذه الأجهزة تعمل بحركة إلكترون مفرد داخل وخارج منطقة موصلة. أجهزة الإلكترونات المفردة من الممكن أن تكون ترانزستورات، خلايا ذاكرة، دارات منطقية. كذلك فمن الأفكار الرائدة في هذا المجال هي استخدام الجزيئات Molecules كتراكيب نانوية لتصميم أجهزة جزيئية. هذا الصنف من الأجهزة سيستفيد من الفيزياء الكمية Quantum physics التي تلعب دورا بالغ الأهمية على المقياس النانوي. ولابد أن نذكر هنا أن جميع هذه الأجهزة تعمل بمفهوم مميزات فرق الجهد والتيار التي تتميز بها جميع أجهزة أشباه الموصلات. أما الاتجاه الثاني فهو **الحوسبة الكمية Quantum Computation**. الحوسبة الكمية لا تهدف لزيادة تسارع نمو حوسبة الأجهزة الرقمية باستخدام التأثيرات الكمية، كلا أنها تستخدم خوارزميات كمية لا تكون ممكنة في الحاسبات الرقمية. في الحاسبات الكمية نستفيد من الظواهر الكمية لنحوسب بطرق معينة أسرع أو أكثر كفاءة، أو لإنجاز ما يستحيل إنجازه باستخدام طرق الحوسبة المألوفة. إن الحاسبات الكمية تستخدم أدوات فيزيائية معينة لربح فائدة حوسبية على

حساب الحاسبات المألوفة. فصفات كتلك التي تسمى التراكب superposition و التشابك entanglement يمكن أن تسمح، في بعض الحالات، لكمية أسية من التوازي. كذلك فإن الماكنات ذات الغرض الخاص مثل أجهزة الكربتوكراف cryptographic devices الكمي تستخدم التشابك entanglement و بعض الخواص مثل عدم الدقة الكمية uncertainty.

الحوسبة الكمية تربط الميكانيك الكمي، نظرية المعلومات، و مفاهيم علم الحاسب. والمجال جديد نسبيا ويوعد بنقل بيانات محمية، زيادة سرعة الحوسبة بشكل ملفت للنظر و لربما يقود لصنع مركبات من الصغر تصل لحد الغاية الأولية للمادة.

إن هذا الكتاب يصف بعض المفاهيم التي تعتبر كمدخل للحوسبة الكمية. سنتناول بعض أساسيات الميكانيك الكميquantum mechanics و عناوين الحوسبة الكمية الأولية مثل البت الكمي quantum bit (التي سنسميها في كتابنا **الكيوبت** لنكون بذلك أول من وضع هذه المصطلح بطريقة ليصبح مفردة من مفردات لغتنا الجميلة كما هو حال الإلكترون على سبيل المثال). ونعني بالكيوبت هنا أي جسيم كمي كأن يكون ذرة (أو أيون) الذي يمكن أن يشغل حالات كمية مختلفة. من هذه الحالات المختلفة تُستخدم حالتين فقط لخزن المعلومات الرقمية digital information. كذلك سنتطرق إلى **الخوارزميات الكمية quantum algorithms**، والإدراك الفيزيائي لهذه الخوارزميات، المفاهيم الأساسية لعلم الحاسب (مثل نظرية التعقيدcomplexity theory، ماكنات تورنكTuring machines، و الجبر الخطيlinear algebra)، نظرية المعلوماتinformation theory ، وأكثر من ذلك.

2-1 كيف تطورت الحاسبات الإلكترونية؟

الصفات الخاصة بالحاسبات الكمية تتطلب منا استعادة معظم المفاهيم الأساسية لعلم الحاسب. هناك اختلاف بين **علم الحاسب** و **نظرية المعلومات information theory**، فرغم أن نظرية المعلومات يمكن أن تعتبر جزءا من علم الحاسب إلا أنها تعامل بشكل

منفصل في هذا الكتاب حيث كرس لها فصلا بحد ذاته. و هذا يعود إلى أن المفاهيم الكمية لنظرية المعلومات تتطلب بعض المفاهيم المعرفة في الفصول التي تلي هذا الفصل.

إن أصول علم الحاسب يمكن اقتفاء أثرها إلى أيـام اختـراع الخوارزميـات مثـل خوارزمية أقليدس Euclid's Algorithm (300 قبل الميلاد) لإيجاد القاسم المـشترك الأعظم لعددين. كذلك فهناك مصادر أكثـر قـدما مثـل المـسلات البابليـة Babylonian cuneiform (2000-1700 قبل الميلاد) التـي تحتوي على برهان واضح للعمليات الخوارزمية. لكـن حتى القرن التاسع عشر من الصعب فصل علم الحاسـب عن العلوم الأخـرى مثـل الرياضيات و الهندسـة. و عليه فبإمكاننا القول أن علم الحاسب بدأ في القرن التاسع عشر.



الشكل1-1: آدى بايرون و جارلس باباج



الشكل(1-2): Alonzo Church و Alan Turing

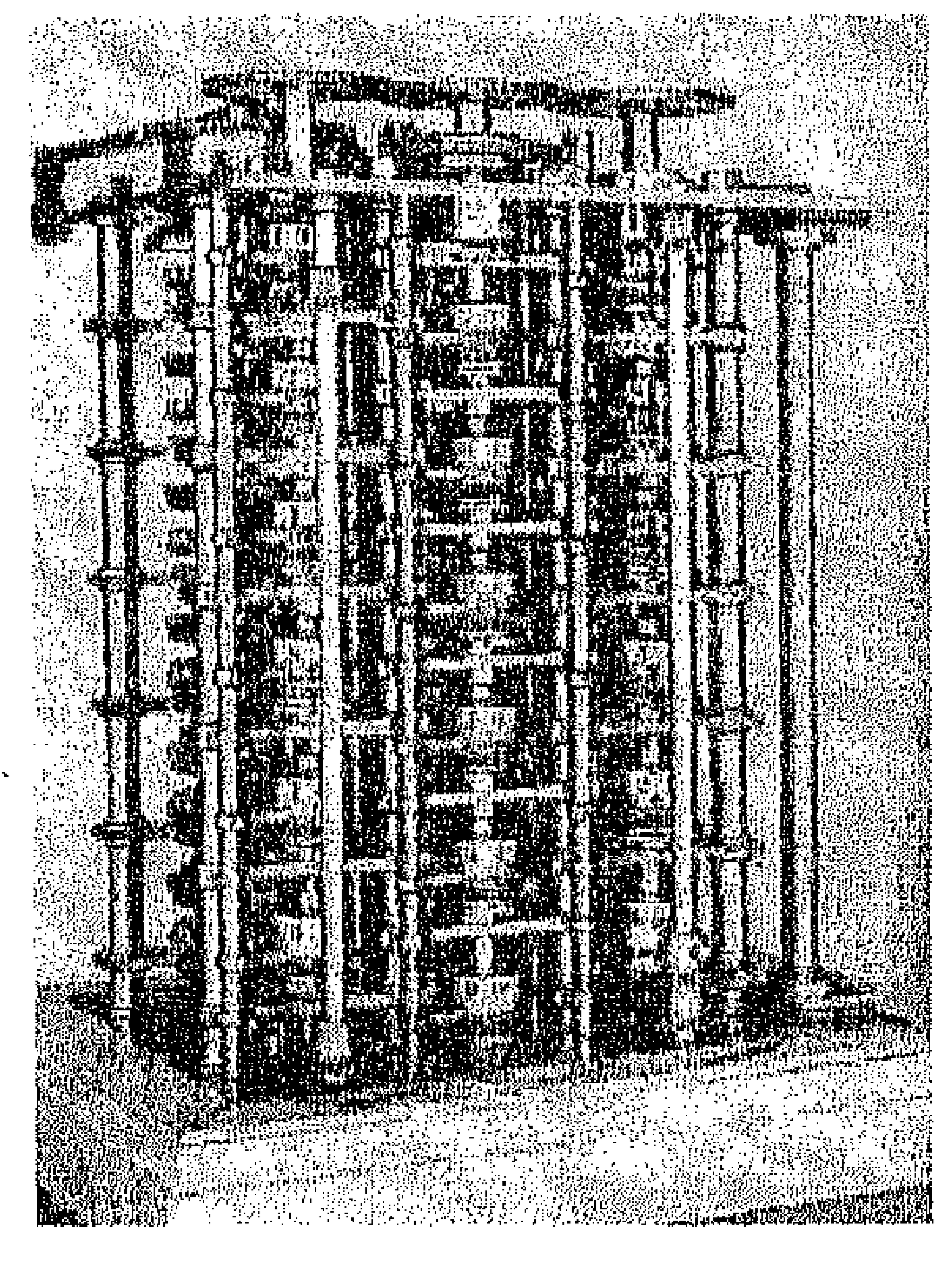
في بداية و منتصف القرن التاسع عشر صمم Charles Babbage (1791-1871)، المبينة صورته في الشكل(1-1)، و بنى جزئيا عدة مكائن حوسبة قابلـة للبرمجـة (انظـر إلـى الشكل(1-4) لماكنة الفرق التي بنيت عام1822) التي لها عدة ميـزات مـن الحاسـبات الحديثة. واحدة من هذه المكائن تسمى **الماكنة التحليلية analytical engine** لهـا بـرامج

قابلة للنقل إلى كاردات تثقيب أساسها تلك المستخدمة في ماكنة صنع الأقمـشة Jacquard loom التي أخترعت من قبل Jofeph Marie Jacquard (1752-1804) سنة 1804. لقد اعتبرت صديقة باباج، Ada Augusta King، ونبيلـة Lovelace، 1815 -1852 (الشكل (1-1)) و ابنة اللورد بايرون من قبل الـبعض كأول مبرمجة و ذلك لكتابتها على الماكنة التحليلية. من المحزن أن عمل باباج تم نسيانه حتى 1930حيـث تـم اختراع علم الحاسب الحديث. يمكـن القـول أن علـم الحاسب الحديث بدأ في سنة 1936 عندما كتب Alan Turing (1912-1954)، أنظر للشكل(1-2)، بحثـا احتوى على فكرة الحاسب الكوني Universal Computer.



الشكل(1-3) Jon Von Neumann

إن أول حاسوب الكتروني تم تطـويره كـان فـي الأربعينات و قـاد Jonvon Neumann 1903-1957 (الشكل1-3) لتطوير معمارية أصيلة و التي لا تستند عليها الحاسبات الحديثة بقوة. أن معمارية Von Neumann تتـضمن وحـدة الحـسابات المنطقيـة Arithmetic Logic Unit (ALU)، وحـــدة السيطرة control unit، الذاكرة memory، الإدخال والإخراج (IO)، التوصيلات bus، و عملية حوسبة. بدأت المعمارية سنة 1945 في أول مسودة لتقرير عن EDVAC.



الشكل(1-4): ماكنة الفرق لباباج

لقد ازدادت قدرة الحاسب بسرعة و تعددت استعمالاته عبر الستين سنة اللاحقة وذلك جزئيـا بسبب اختراع الترانزستور سنة 1947و الـدارات المتكاملـة integrated circuits سـنة

1959وتحسن ملحقات الحاسب من أجهزة إدخال وإخراج وشاشات وطابعات ...الــخ. لقــد اقترح Gordon moor قانون مور Moore's law سنة 1965، النسخة المعدلة الحاليــة منه **تنص على أن تعقيد المعالج Processor complexity سيتضاعف كل ثمانية عــشر شهرا من ناحية الكلفة (في الحقيقة فهو أكثر من سنتين)**. هذا القانون لا يزال صــحيحا لكنه بدأ يتداعى، و مكونات الحاسب بدأت تصبح أصغر. عاجلا ستكون صغيرة، وســتكون مصنوعة من عدد قليل من الذرات. بحيث لا يمكن تفادي تأثيرات الكم، و من المحتمل إنهاء قانون مور.

هناك طرق يمكن الاستفادة بواسطتها من ظواهر الكم على مستوى الإحساس الكلاسيكي، لكن بالاستثمار الكامل لتلك الظواهر يمكننا إنجاز أشياء أكثر. الطريقة الأخيرة هي أساس الحوسبة الكمية.

3-1 الأعداد الثنائية واللغات الرسمية

Binary Numbers and Formal Languages

يتم تمثيل الأرقام في الحاسبات بصيغة ثنائية، كسلسلة من أرقام الصفر والواحد لأن ذلــك سهل الاستخدام في البناء المادي hardware (بالمقارنة مع الصيغ الأخرى، على ســبيل المثال الأرقام العشرية). يمكن تحويل أي معلومة من أو إلى أرقام الصفر والواحد ويــسمى هذا التمثيل **بالتمثيل الثنائي Binary Representation**.

مثال (1-1): نورد هنا بعض الأعداد الثنائية و ما يكافئها من أعداد عشرية.

العدد الثنائي 1110 يكافئ 14 في العشري.

العدد العشري 212 عندما يحول إلى ثنائي يصبح 11010100

فيما يلي الأعداد الثنائية (على جهة اليسار) تمثل الأرقام العشرية من 0 إلى 4 التــي علــى جهة اليمين:

$$0 = 0$$
$$1 = 1$$
$$10 = 2$$
$$11 = 3$$
$$100 = 4$$

للعدد الثنائي الصيغة $b_{n-1}.......b_2 b_1 b_0$ حيث n هو عدد الأرقام الثنائية (أو بت، حيث كل رقم يكون 0 أو 1) و b_0 هو الرقم في أقصى اليسار least significant digit. نستطيع تحويل سلسلة ثنائية إلى رقم عشري D باستخدام القاعدة التالية:

$$N = \sum_n a_n 2^n \quad (1.1)$$

حيث a_n تأخذ القيم 0 أو 1. أما n فتمثل عدد أرقام الثنائي ابتداء من الصفر. هذه المعادلـــة من الممكن أن تكتب بطرقة أوضح كما يلي:

$$N = 2^{n-1}(a_{n-1}) + ... + 2^2(a_2) + 2^1(a_1) + 2^0(a_0) \quad (1.2)$$

مثال(1-2): حول العددين الثنائيين111011 و 11010100 إلى عددين عشريين.

الحل: العدد الثنائي 111011 يقابل العدد العشري 59 وذلك كما يلي:

$$N = 2^5(1) + 2^4(1) + 2^3(1) + 2^4(0) + 2^1(1) + 2^0(1)$$
$$= 32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1$$
$$= 59$$

أما العدد الثنائي 11010100 فيقابل العدد العشري 212 وذلك طبقا للتالي:

$$N=2^7(1)+2^6(1)+2^5(0)+2^4(1)+2^3(0)+2^2(1)+2^1(0)+2^0(0)$$
$$=128+64+16+4$$
$$=212$$

نسمي الأعداد الثنائية نظام الأعداد التي أساسها 2 لأنه يعتمد على رمزين 0 و 1. بالمقارنة، ففي النظام العشري الذي أساسه 10 ، لدينا 0، 1، 2، 3........9.

مثال(1−3): حول العدد العشري 59 إلى عدد ثنائي.

الحل:

$$\frac{59}{2}=29 \Rightarrow residual\ 1$$
$$\frac{29}{2}=14 \Rightarrow residual\ 1$$
$$\frac{14}{2}=7 \Rightarrow residual\ 0$$
$$\frac{7}{2}=3 \Rightarrow residual\ 1$$
$$\frac{3}{2}=1 \Rightarrow residual\ 1$$
$$we\ are\ left\ with\ 1$$

لذلك فالعدد الثنائي هو 111011 أي نسجله من الأسفل للأعلى.

كل المعلومات في الحاسبات الحديثة تخزن على شكل **صيغ ثنائية** **binary format**، حتى تراكيب الآلة هي على شكل صيغة ثنائية. وهذا يسمح للمعلومات و التراكيب بأن تخزن في ذاكرة الحاسب و يسمح لكل العمليات المنطقية الأساسية للماكنة بأن تمثل كعمليات ثنائية.

هنا لا بد أن نبين بأن الحوسبة في حقيقتها هي عملية فيزيائية physical process تحول دخل معين input لخرج معين output . فجميع المعلومات التي نتعامل معها في الحاسب تمثل في الأجهزة الرقمية على شكل كميات فيزيائية physical quantities تسمى إشارات signals. فالإشارات الكهربائية مثل فرق الجهد والتيار هي الأكثر شيوعا في الأجهزة الرقمية. والإشارات في جميع الأجهزة الرقمية هذه الأيام لها قيمتين محددتين two discrete values هاتين الحالتين هما اللتان نسيمهما الثنائي binary. إذن فيجب أن تكون جميع الدارات المستخدمة في الحاسب الكلاسيكي ذات حالتين مستقرتين. فعندما نقول "بت" فكما أسلفنا نعني 0 أو 1 أي إشارتين مختلفي المقدار الفيزيائي. البت، كما نعلم، هي الوحدة

الأساسية في معالجة البيانات، أي إن لم يكن بالإمكان تحويل معلومة معينة إلى مجموعة من 0 و 1 فإن معالجتها بالحاسب الكلاسيكي ضرب من المستحيل.

4-1 جبر بول Boolean Algebra

لا نريد التوسع في هذا الموضوع ولكن يجب أن نذكر أن أحد المتطلبات الأساسية عند تناول الدارات الرقمية هو إيجاد الطرق التي تجعلها أبسط ما يمكن. وهذا يتطلب أن تختصر التعبيرات المنطقية لتعبيرات أبسط تنتج نفس النتائج تحت كل الحالات الممكنة. التعبير الأبسط يمكن أن يوظف بدارة أبسط مما يقلل كلفة البوابات ويختزل عددها. وكذلك فإنه يقلل القدرة المستهلكة والمساحة المطلوبة للبوابات. أحد أدوات اختزال التعبيرات المنطقية هو رياضيات التعبيرات المنطقية التي أوجدها **George Boole في سنة 1854** والتي تعرف اليوم **بجبر بول Boolean Algebra**. إن نتائج جبر بول سهلة ومباشرة ويمكن تطبيقها لأي تعبير منطقي. إن التعبير المختزل الناتج يمكن أن يكون جاهزا للاختبار بجدول حقيقة Truth table للتحقق من أن الاختزال متحقق. لاحظ الجدول (1-1):

جدول(1-1)

A	B	C	S	D
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

ماذا يمثل هذا الجدول؟ لو أننا أردنا جمع العددين الثنائيين 10 و 11 (أي 2 و 3)، فإننا نجمع أولا العمود الأيمن للعددين أي 0 مع 1 والنتيجة هي 1، ثم نجمع العمود الأيسر للعددين أي 1 مع 1 وطبعا في التمثيل الثنائي ليس عندنا 2 إذن سنحصل على 0 ونحمل 1 للعمود الثالث لتصبح النتيجة 101 وهو 5 كما نعلم. لنعود إلى الجدول ونفرض أن A من الممكن أن تكون مقدار البت في أي عمود من العدد الأول، أما B فهي مقدار البت لنفس العمود من العدد الثاني. الرقم C هو الرقم المحمول من عملية الجمع

للعمود في اليمين أما S فهو مقدار البت في الجمع. وأخيرا فإن D تمثل المحمول في العمود على اليسار. بدلالة جبر بول يمكن التعبير عن S في الجدول(1−1) بالعلاقة:

$$S = \left(\overline{\overline{A}B + A\overline{B}}\right)C + \left(\overline{A}B + A\overline{B}\right)\overline{C} \qquad (1.1)$$

الخط فوق الحرف يعني المكمل complement (مكمل 0 هو 1) وعليه فللصف الأول تكون قيمة S كما يلي:

$$S = \overline{(0.1 + 1.0)}.1 + (0.1 + 1.0)0 = \overline{0}.1 + 0 = 1.1 = 1$$

أما D فنعبر عنها في جبر بول كما يلي:

$$D = \left(\overline{A}B + A\overline{B}\right)C + AB \qquad (1.2)$$

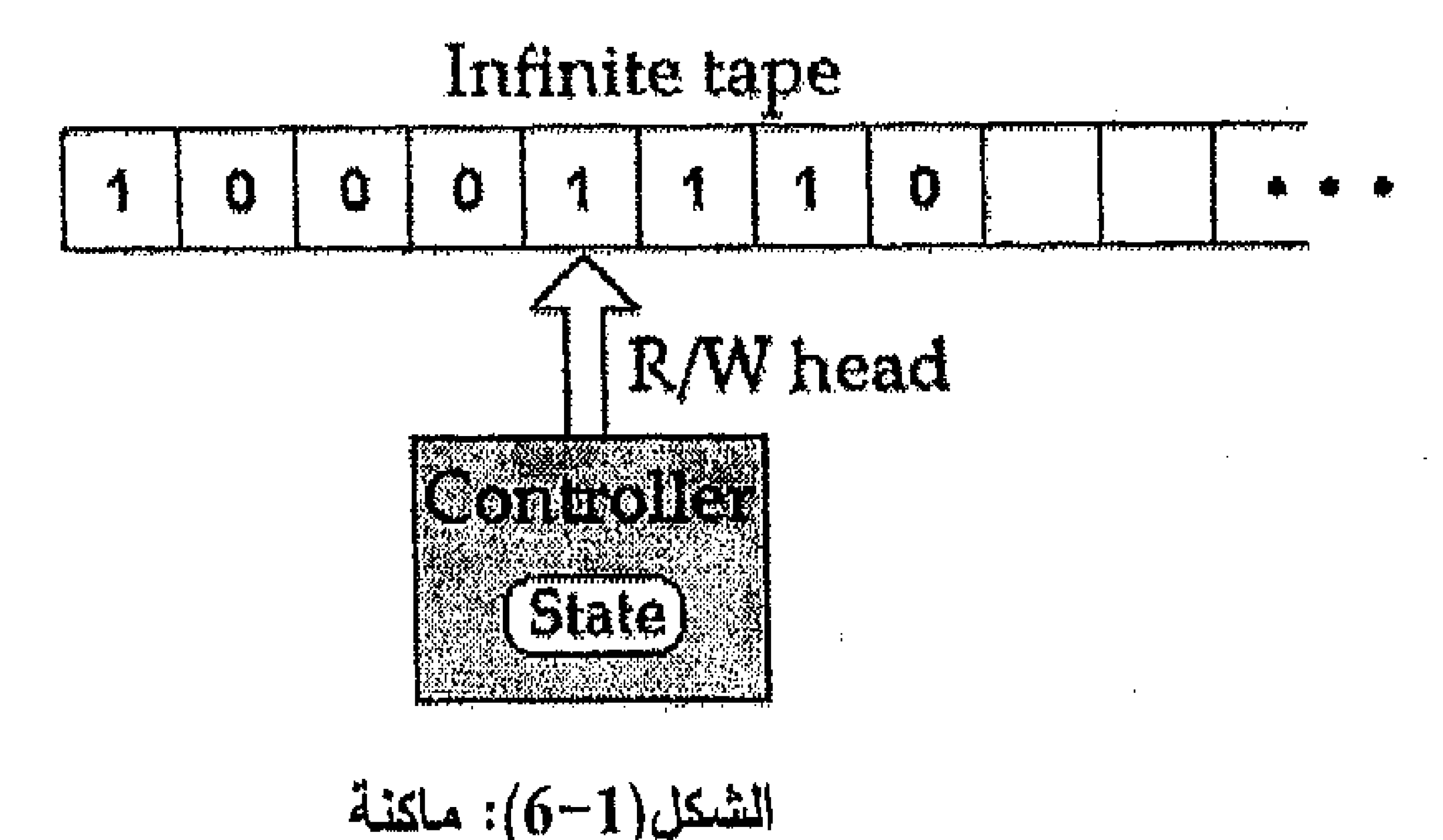
5-1 ماكنة تورنك The Turing Machine

إن أبسط حاسوب رقمي "نظري" هو ماكنة تورنك. هنا تشير كلمة رقمي digital بأن الحاسب بأرقام محددة ولا يستخدم أي حالة تراكب كمي.

الشكل (1−5): Kurt Godel و David Hilbert

في سنة 1928 سأل David Hilbert (1802 − 1943) (الشكل2−5) عن إمكانية وجود عملية خوارزمية عامة تقرر فيما إذا كانت أي عملية رياضية صحيحة أم خاطئة. اقترح حدسه الجواب "نعم"، بعد ذلك في سنة 1930، ذهب بعيدا مدعيا أنه لا توجد مشاكل غير قابلة للحل في الرياضيات. الفكرة التي أثبت خطأها فورا Kurt Gödel 1908 − 1976 (الشكل2−5) في سنة 1931 بواسطة نظريته غير الكاملة incompleteness theorem التي يمكن أن تجمع بشكل أولي كما يلي:

يمكن أن تكون قادرا على برهنة أي عبارة تخطر على البال حول الأرقام في نظام معين بالخروج من النظام كي تأتي بقواعد جديدة ومبادئ مقبولة، و لكنك بعملك هـذا سـتخلق نظاما أكبر بعباراتـه الغيـر قابلـة للبرهان.



الشكل(1-6): ماكنة

بعد ذلك في سنة 1936 جاء كل مـن Alan Turing و Alonzo Church (1903-1995)(الشكل(1-5)) بـشكل مـستقل عـن بعضهما البعض بنماذج للحوسبة، هدفها هو تحليل فيما إذا كانت الرياضيات احتوت علـى مشاكل غير قابلة للحوسبة أم لا. وهذه كانت مشاكل ليس لها حلول خوارزمية (**الخوارزمية تعني طريقة لحل مشكلة رياضية تكون مضمونة النهاية بعد عدد من الخطوات**). نمـوذج Turing (عالم رياضي بريطاني) ، و الذي يسمى الآن ماكنة Turing (TM) موضح في الشكل (1-6). لقد تبين أن نموذجي Turing و church كانا متكافئي القدرة. لقد سـميت الأطروحة التي تنص على أن أي خوارزمية قابلة للتنفيذ يمكن أن تنفذ على ماكنة Turing، الاسم الذي أعطي لنموذج Turing، **نقول سُميت بأطروحة Church – Turing**.

تتكون ماكنة تورنك من ثلاثة أجزاء شريط Tape مقسم لمربعات (كما نلاحظ في الشكل(1-6)) ورأس (مساح scanner) للقراءة والكتابة ومسيطر controller. تستطيع هذه الماكنـة كتابة الحرف X أو 1 في مربع فارغ أو تمسح ما مكتوب في المربـع. أي عـدد صـحيح موجب يكتب كسلسلة من رقم 1 عددها يعكس مقدار ذلك العدد. فمثلا العدد 5 يكتـب علـى شكل 11111 أما الحرف X فيشير إلى بداية أو نهاية العدد.

1-6 الدارات Circuits

سوف لا ندخل في تفاصيل معمارية الحاسب المألوف بل سنعطي بعض المفاهيم التي نحتاجها للحوسبة الكمية quantum Computing، على سبيل المثال الدارات circuits، المسجلات Register، و البوابات gates. ولهذا السبب سنتناول الدارات التقليدية (الكلاسيكية).

تصنع الدارات التقليدية من التالي:

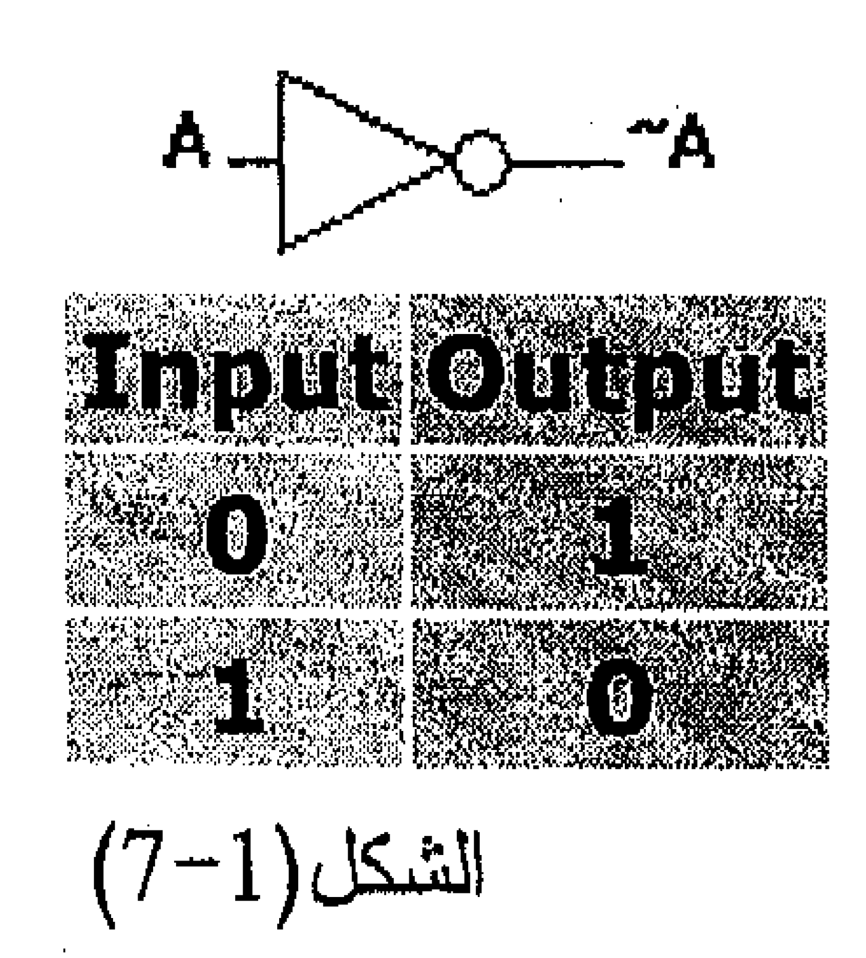
1- **البوابات gates** – التي تنجز عمليات منطقية على المدخلات Inputs . إذا أعطيت مدخلات متكونة من 0 أو 1 فإنها تنتج مخرجات 0 أو 1 (انظر أدناه). هذه العمليات يمكن أن تمثل بجداول الحقيقة truth tables التي تعني جميع التراكيب المختلفة للمخرجات مع المدخلات.

2- **الأسلاك weirs** تحمل الإشارات بين البوابات و المسجلات.

3- **المسجلات Rigisters** مكونة من خلايا تحتوي على 0 أو 1 أي bits

عندما طور بول نظامه المنطقي، أشار إلى أن أي عبارة معقدة يمكن أن تكتب بدلالة ثلاث مؤثرات بولية Boolean أساسية AND و OR و NOT. وبما أن عمل هذه البوابات المنطقية الثلاث يمكن أن يوصف باستخدام جبر بول، فإن أي دائرة منطقية، مهما كانت معقدة يمكن أن توصف تماما باستخدام مؤثرات بول AND و OR و NOT.

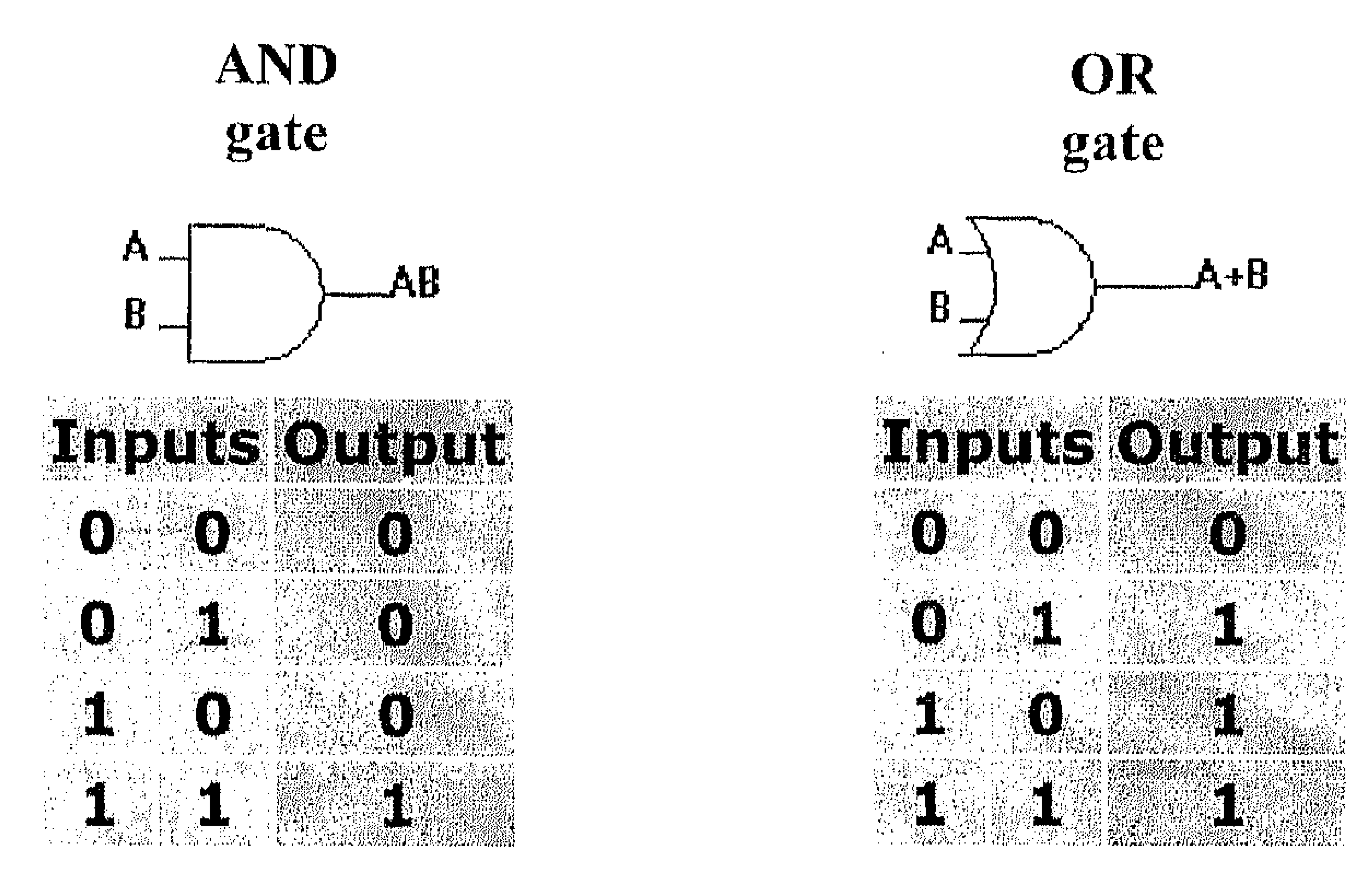
NOT gate



Input	Output
0	1
1	0

الشكل(1-7)

إن جداول الحقيقة لهذه البوابات الثلاث مبينة في الشكل(1−7).



AND gate:

Inputs		Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR gate:

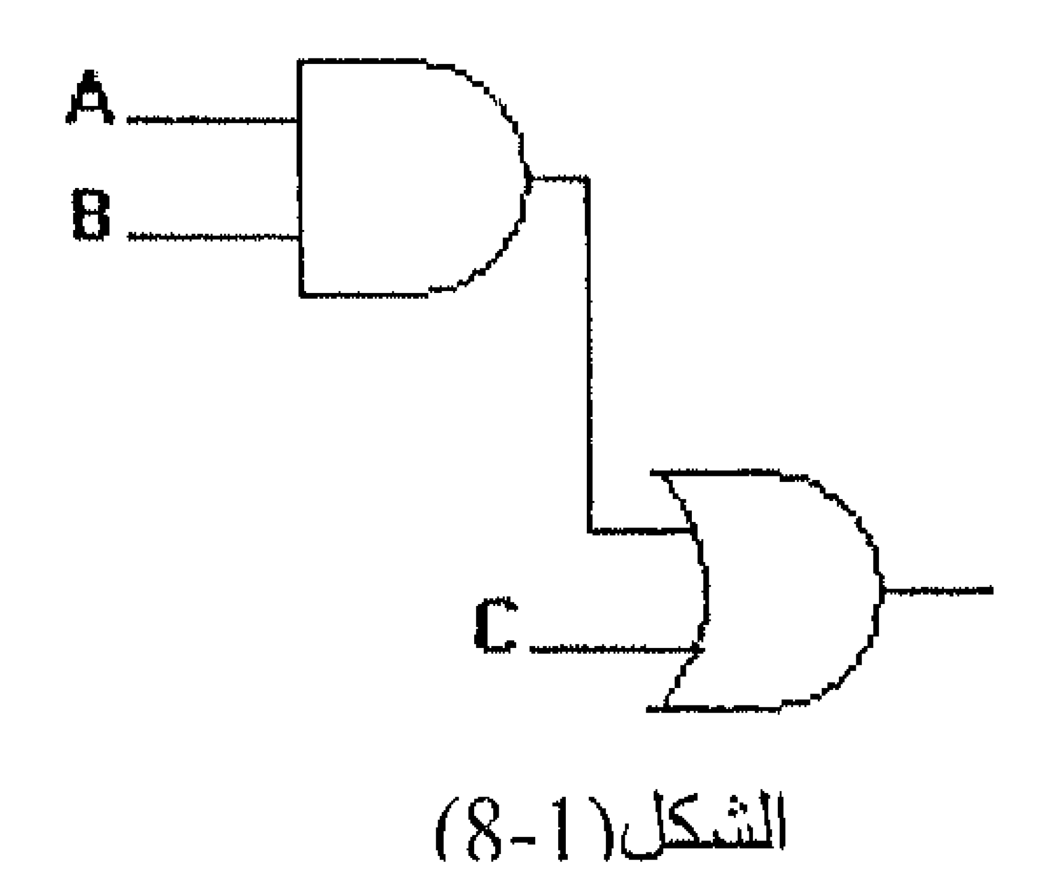
Inputs		Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

الشكل(1−7): بوابات منطقية مع جداولها.

يمكننا ربط أكثر من بوابة وملاحظة الخرج كما في المثال التالي:

مثال(1−4): ربطت بوابة AND وبوابة OR كما مبين في الشكل(1−8). أكتب جدول الحقيقة الخاص بالدارة وبين التعبير البولي لها.

الحل : سيكون خرج البوابة AND هو AB بينما الخرج النهائي فهو AB+C. أما جـــدول الحقيقة فهو مبين في الجدول (1−2).



الشكل(1-8)

الجدول(1-2)

Inputs				Output
A	B	C	AB	AB+C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

مثال(1-5): ما هي وكيف يجب أن تربط البوابات المنطقية التي يجب أن تنتج ما يلي:

a) A + B　　　b) A(B + C)　　　c) AB+ AC

d) AB　　　e) A + B

الحل: دارات البوابات المنطقية

a)

A

B

A	B	A	A+B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

b)

A B C

A	B	C	B+C	A(B+C)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

c)

A B A C

A	B	C	AB	AC	AB+AC
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

d)

A B

A	B	AB	AB
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

e)

A	B	A	B	A+B
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

7-1 تكميم مصادر الحوسبة

Quantifying Computational Resources

لنفرض بأننا ذهبنا خلال خوارزمية بشكل نظامي و نفذناها سطر بعد سطر (انظر المثال نهاية هـذا البنـد) فكـم السرعة التي سـتنفذ بهـا الخوارزمية متغير معـين n الذي يـصف " حجـم " الدخل. على سبيل المثـال عدد عناصر قائمـة يـراد ترتيبهـا. لنفـرض أننـا نستطيع تكمـيم العمـل الحوسبي المشمول كدالـة لـ n ، تأمل التعبير الرياضي التالي:

$$3n + 2\log n + 12$$

الشكل(9-1)

الجزء المهم من هذه الدالة هو 3n لأنها تنمو أسرع من نمـو الحـدين الآخـرين (أنظـر للشكل(1−9))، أي أن n تنمو أسرع من logn و الثابت.

نقول بأن الخوارزمية التي أنشأت هذه النتيجة لها.

$$O(n)$$

تعقيد زمن (أي أننا نهمل 3). الأجزاء المهمة من الدالة وضحت هنا:

و عليه فإننا شطرنا الدالة 3n+2logn+12 إلى أجزاءها 3n ، 2logn و 12.

بشكل رسمي أكثر يسمح لنا الرمز الكبير O أن ننشأ حد أعلى لتصرف الخوارزميـــة. و عليه ، فبأسوأ الأحوال ستأخذ هذه الخوارزمية تقريبا n دورة حتى تكتمل (زائد رقم غيـــر مهم قريب من الصفر). لاحظ أن هذا هو أسوأ الأحوال، أي أنها لا تعطينا فكرة عن معـــدل التعقيدية في خوارزمية. صنف O(n) يحتوي على جميع الدوال التي هي أسرع من O(n).

على سبيل المثال $3n \le 3n^2$ و عليه فإن 3n يكون محددا بالصنف $O(3n^2)$ ($\forall$موجب n)

للحد الأدنى نستخدم الرمز Ω.

مثال : 2^n يكون فى$\Omega\ (n^2)$ كما $2^n \ge n^2$ ($\forall$ ل n كبيرة بما فيها الكفاية)

ختاما ، فالرمز الكبير θ يستخدم ليبين أن دالة ما تكون مكافئة في كلا الحدين الأعلـــى و الأدنى. كصيغة تعطى بالشكل

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow O(g(n) = \Omega(g(n)) \qquad (2.2)$$

مثال $4n^2 + 40n + 2 = \Theta(n^2) \neq \Theta(n^3) \neq \Theta(n)$

كما وعدنا، هذا مثال أكثر عمقا لمعدل التعقيد في خوارزمية.

مثال :تعقيد الزمن : الترتيب السريع ضد الترتيب الفقاعي

هنا n هو عدد العناصر في قائمة، عدد عمليات المبادلة

$$(n-1)+(n-2)+......+=\frac{n(n-1)}{2}$$

إن العامل الأكثر أهمية هنا هو n^2 . إن معدل و أسوأ حالة تعقيدية زمن تكون $O(n^2)$.

إذا فعلنا نفس الشيء مع خوارزمية الترتيب السريع فإن معـــدل تعقيـــد الـــزمن هـــو فقـــط $O(n \log n)$. و عليه فلدينا الآن فكرة رياضية دقيقة عن سرعة خوارزمية.

8-1 أصناف التعقيد القياسية Standard Complexity Classes

التعقيد الحوسبي هو دراسة مقدار صعوبة مشكلة معينة كي تحسب. أو بعبارة أخرى، ما هي أقل كمية من الموارد المطلوبة من قبل أحسن خوارزمية معروفة لحل المشكلة. وتعتبر نظرية التعقيد إحدى أجزاء نظرية الحوسبة. أكثر هذه الموارد شيوعا هي **الزمن** ذلك لأن أي خوارزمية تحتاج لفترة زمنية كي تنفذ فكلما زاد عدد الخطوات زاد ما يقابلها من الوقت اللازم لحل مسألة معينة، يضاف إلى عامل الزمن عامل **حجم الذاكرة** اللازمة لحل المسألة. يمكن أن تُأخذ بالاعتبار موارد أخرى، مثل : كم عدد المعالجات المتوازية اللازمة لإنجاز الحساب باستخدام برمجة متوازية. وتجدر الإشارة إلى أن نظرية التعقيد تختلف عن نظرية الحوسبة في أن الأخيرة تدرس فيما إذا كانت المسألة قابلة للحساب أم لا بشكل مطلق، أما نظرية التعقيد فتدرس كيفية إنجاز الحسابات بكفاءة و سرعة. يمكننا تعريف الزمن على أنه عدد العمليات الأولية التي يحتاجها برنامج (خوارزمية) لإجراء العمليات.

هناك مشاكل سهلة الحل، حيث يتم إيجاد حل لها في وقت قصير. فمثلا ترتيب مجموعة أعداد من الأصغر إلى الأكبر يتم في وقت قصير، والعلاقة الموجودة بين عدد عناصر المجموعة و الوقت الذي يستغرقه الحاسب باستعمال خوارزميات الترتيب يعبر عنها بدالة . عادة ما يرمز للمشاكل المتعددة الحدود المحددة ب: P

أمثلة:

1. **ضرب عددين.**
2. **القاسم المشترك لعددين.**
3. **معرفة هل أن عددا معين أولي أم لا.**

من ناحية أخرى، هناك مشاكل صعبة الحل، حيث يتم إيجاد حل لها في وقت جدا طويل. فمثلا تفكيك عدد إلى حاصل ضرب أعداد أولية يحتاج إلى وقت طويل كلما كبر العدد، و

العلاقة الموجودة بين عدد عناصر المجموعة و الوقت الذي يستغرقه الحاسب باستعمال خوارزميات الترتيب يعبر عنها بدالة أسية في أغلب الأحيان. كما أنه إذا كان من الصعب إيجاد الحل، فإنه من السهل التأكد من صحة أو خطأ الجواب، فعملية التأكد و التحقق من الجواب تجرى في وقت متعدد الحدود. هذا النوع من المشاكل يسمى متعددة الحدود غير المحددة Non-Deterministic polynomial ويرمز لها بالرمز NP

أمثلة:

1. **مشكلة تلوين الخط.**
2. **مشكلة التفكيك إلى حاصل ضرب أعداد أولية.**

إن المشاكل الصعبة تنموا أسرع من أي متعددة حدود في n، على سبيل المثال.

$$n^2$$

هي متعددة الحدود و سهلة بينما

$$2^n$$

أسية وصعبة. أن ما نعنيه عندما نقول صعبة هو أننا كلما جعلنا n كبيرة فإن الزمن المستغرق لحل المشكلة يرتفع بمقدار 2^n، أي أسيا. و عليه فيمكننا القول أن $O(2^n)$ يكون صعبا أو غير قابلة للاقتحام intractable.

1-9 أطروحة Charch-Turing القوية

كانت أطروحة Charch-Turing القوية بالأصل شيئا شبيها بما يلي:

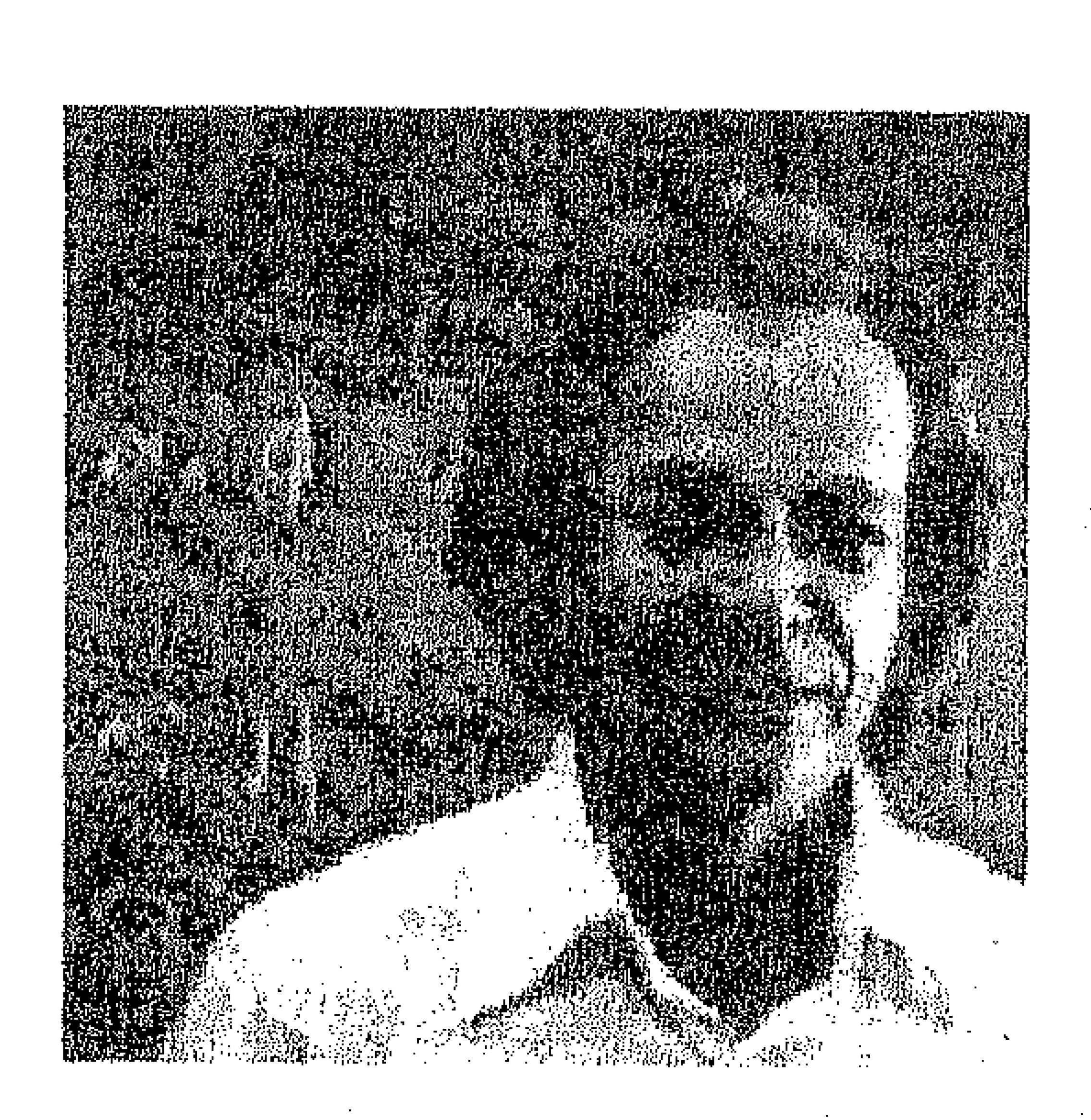
أي عملية خوارزمية يمكن أن تحاكى وبدون ضياع بالكفاءة باستخدام ماكنة تورنك.

نحن نقول أن قدرة TM هي كقدرة أي موديل حوسبي آخر بدلالة صنف المشاكل التي يستطيع حلها, أي ربح كفاءة بسبب استخدام موديل خاص، وهي على الأكثر متعدد الحدود.

تم تحدي هذه الفكرة سنة 1977 من قبل Robert Solovay وVolker Strassen اللـذان ادخلا خوارزميات عشوائية بالفعل والتي تعطي فائدة حوسبية مستندة على التركيب المعماري للماكنة. عليه، فان هذا قاد إلى مراجعة أطروحة Church-Turing والتي تربط الآن بماكنة تورنك الاحتمالية Probabilistic Turing Machine (PTM) والتي يمكن وصـفها بمـا يلي:

إن ماكنة تورنك المحددة التي تمتلك تركيب كتابي إضافي حيث أن قيمة الكتابة يكون موزعا بانتظام في الألف باء ماكنة تورنك (يشكل عام، انه مشابه لكتابة 1 أو 0 على شريط).

وهذا يعني أن الخوارزميات التـي تعطـي نفـس الدخل يمكن أن يكون لها أزمان تنفيذ مختلفة ونتـائج مختلفة إذا كان ذلك ضروريا. كمثال على خوارزمية يمكن أن تستفيد من PTM هو الترتيـب السـريع. بالرغم من انه كمعدل ينفذ الترتيب السريع في زمـن $O(n\log n)$ إلا أنه لا يزال له زمن تنفيـذ $O(n^2)$ كأسوأ حالة إذا كانت القائمة قد رتبت مسبقا. جعـل القائمة عشوائية مسبقا يضمن تنفيذ الخوارزمية فـي الغالب في $O(n\log n)$. إن PTM لها مجموعتها الخاصة من أصناف التعقيد بعضها مذكور في ملحق A.1.


الشكل(1-10): ريتشارد فايمن

هل نستطيع بكفاءة أن نحاكي أي خوارزمية ليست احتمالية على ماكنة تورنك الاحتماليـة بدون تباطؤ أسي؟ الجواب"نعم" طبقا لأطروحة Church-Turing القوية الجديدة:

أي نموذج حوسبة يمكن أن يحاكى على ماكنة تورنك الاحتمالية في زيادة متعددة الحـدود في عدد العمليات الأساسية.

تحد جديد جاء من ناحية أخرى عندما اقترح رتشارد فايمن(1918-1988) (الــشكل 1-10) في أوائل الثمانينات، انه من الممكن محاكاة الأنظمة الكمية باستخدام الميكانيكك الكمي. لقد أشار هذا باختصار لحاسوب كمي جديد. ثم بعد ذلك ذهب ليتساءل فيما إذا كان ممكنــا محاكاة أنظمة الكم على مكائن تورنك الاصطلاحية (أي الكلاسيكية). من الصعب محاكـــاة أنظمة الكم بشكل فعال، في الحقيقة تصبح أصعب أسيا كلما كانت لـــديك مركبـــات أكثـــر. حدسيا، محاكاة TM لا يمكن أن تستمر مع تطور نظام الفيزياء نفسه. إنها تتراجـــع أكثـــر وأكثر إلى الخلف، أسيا. بعد ذلك وضع فايمن الأسباب قائلا إذا بني المحاكي من "مركبـــات كمية" فانه ربما لا يتخلف. وعليه فان مثل هذا " الحاسب الكمي" سيبدو أكثر كفاءة منTM. أن أطروحة Church-Turing القوية تبدو وكأنها انتهكت (لان النموذجين غير متكـــافئين من ناحية متعددة الحدود).

أخذت الفكرة زخرفها بحق في سنة 1985، مستندا على فكرة فـــايمن. اقتـــرح David Deutsch مراجعة أخرى لأطروحةChurch-Turing القوية. لقد اقترح معمارية جديـــدة مستندة على الميكانيك الكمي، على افتراض أن كل الفيزياء اشتقت من الميكانيك الكمي (هذا هو مبدأ Deutsch-Church-Turing). ثم وضح بعد ذلك خوارزمية كمية بـــسيطة التـــي تبدو أنها برهنت المراجعة الجديدة. لقد طورت خوارزميات أكثر والتي بدت بأنها تعمل على ماكنة تورنك الكمية بشكل أفضل من الكلاسيكية(انظر أدناه) (بشكل ملحوظ هو خوارزميات مفكوك Shor وبحثGrover's search).

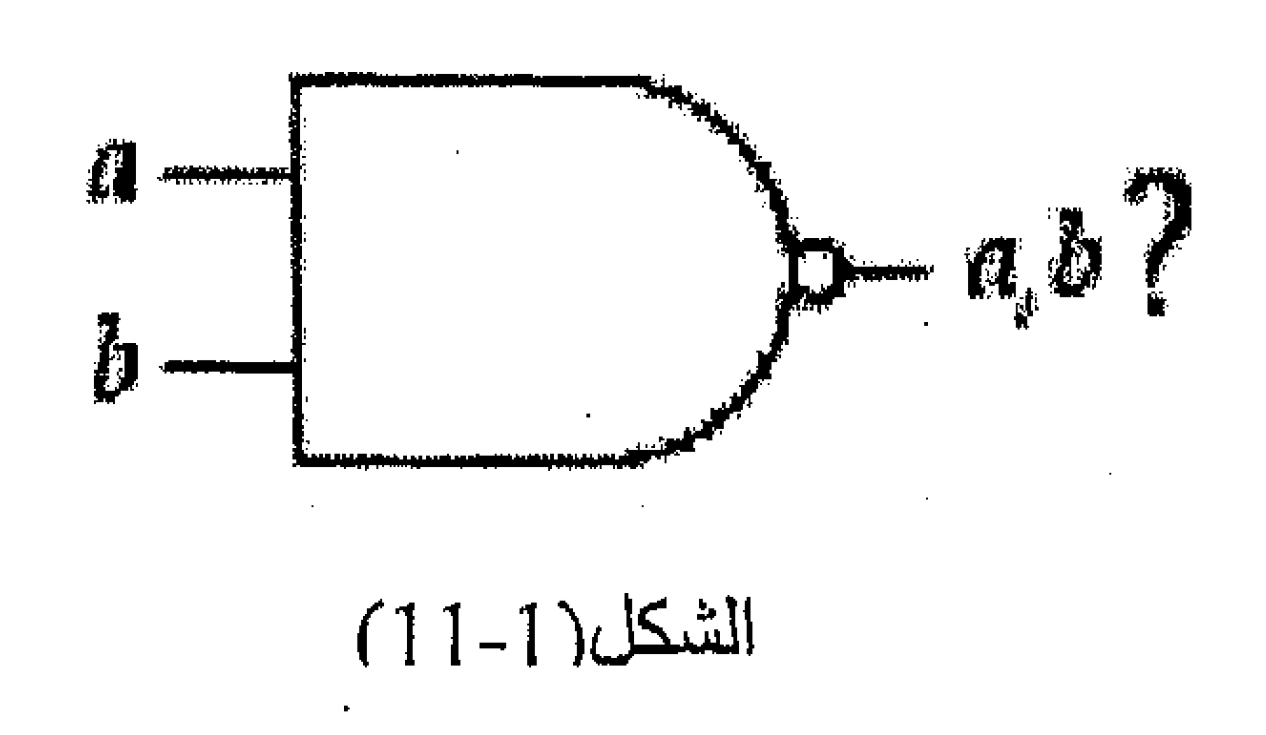
1-10 ماكنة تورنك الكمية Quantum Turing Machines

إن ماكنة تورنك الكمية هي ماكنة تورنك الاعتيادية ولكن بموازاة كمية. إن رئس وشـــريط لماكنة QTM يوجدان في حالات كمية، وكل خلية من الشريط تمسك وحدة معلومات كميـــة (qubit) التي يمكن أن تحتوي على ما يسمى بتركيب الكميات 0 و 1. لا تقلق كثيرا علـــى

ذلك الآن لأننا سنتناولها بالتفصيل لاحقا، ما هو مهم أن QTM يمكن أن تنجز حسابات على عدة مقادير آنيا باستخدام الظواهر الكمية. الشيء الذي لا يشبه الموازاة الكلاسيكية التي تتطلب معالج منفصل لكل مقدار مؤثر عليه بشكل متواز، في الموازاة الكمية يؤثر معالج على كل المقادير آنيا.

11-1 الطاقة والحوسبة Energy and Computation

عندما يتطور نظام كمي معزول فانه ينجز ذلك بشكل عكوسي. وهذا يتضمن انه إذا كان حاسوب كمي له مركبات، مماثلة للبوابات، التي تنجز عمليات منطقية فان هذه المركبات، إذا تصرفت طبقا للميكانيك الكمي، فسوف تنجز كل العمليات المنطقية بشكل عكوسي.



الشكل(1-11)

معظم الدارات الكلاسيكية غير عكوس. وهذا يعني أنها تفقد المعلومات في العملية الخاصة بتوليد المخرجات من المدخلات، أي أنها غير قابلة للعكس. كمثال على ذلك هو بوابة NAND(الشكل 1-11). بشكل عام ليس ممكنا، عكس الخرج. كمثال فمعرفة الخرج 1 لا يسمح لأحد أن يحسب الدخل: يمكن أن يكون 00، 10 أو 01.

في سنة 1961، وضح الفيزيائي Rolf Landauers الذي يعمل في IBM بأنه عندما تضيع المعلومات في دائرة غير عكوس فإنها تضيع كحرارة.

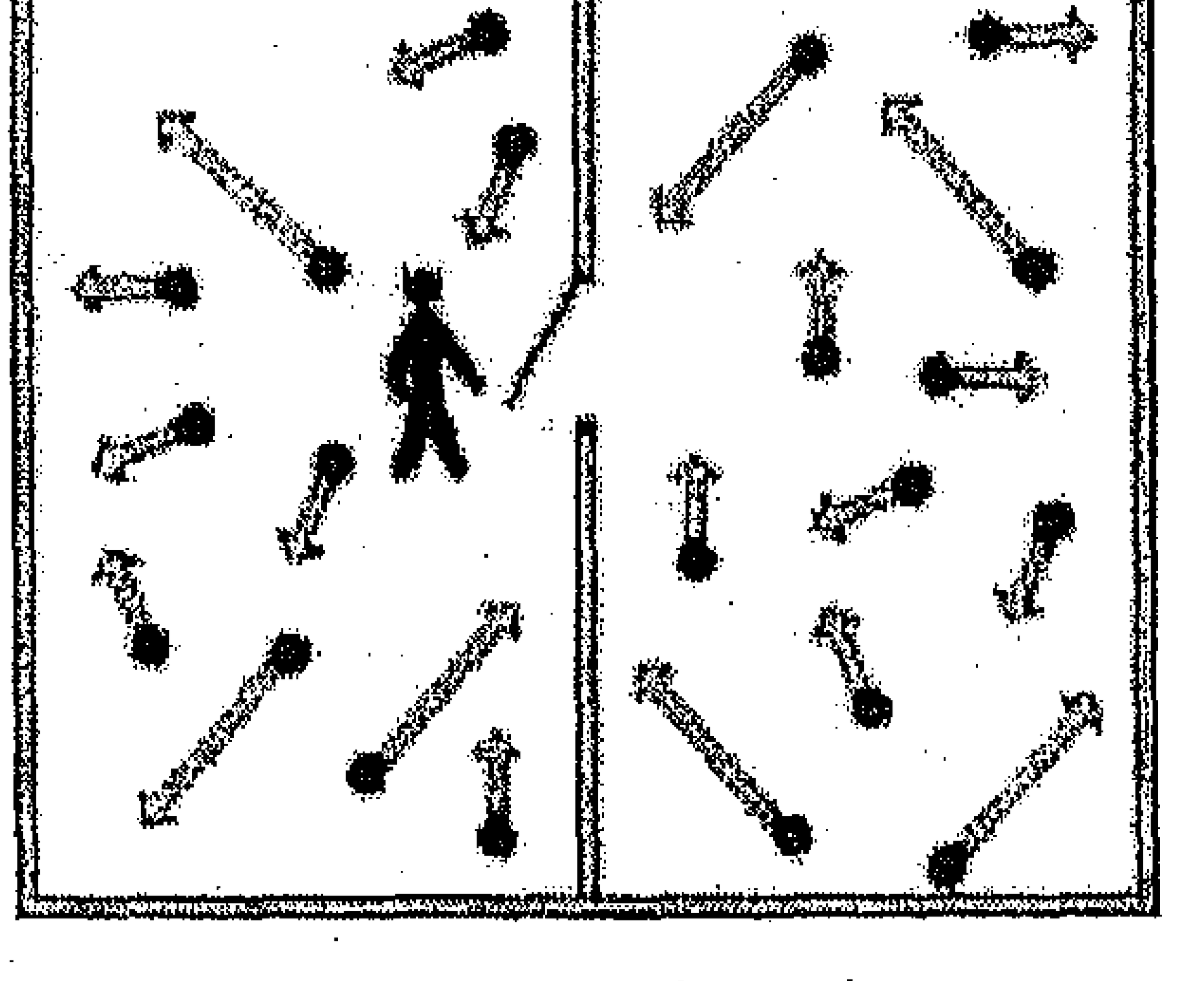
هذه النتائج تم الحصول عليها بالاستناد على الفيزياء الكلاسيكية نظريا، فإذا كنا نريد حاسوب كلاسيكي باستخدام أجزاء عكوس عندئذ يمكن إنجاز العمل بدون ضياع حراري وبدون استخدام الطاقة، رغم أننا عمليا لا نزال نحتاج إلى تضييع بعض الطاقة لإصلاح أي أخطاء فيزيائية تحدث خلال عملية الحوسبة. كمثال جيد للربط بين العكوسية و المعلوماتية هو استعراض ماكسويل Maxwell's demon الذي سيوصف في البند التالي.

12-1 شيطان ماكسويل Maxwell's Demon

شيطان ماكسويل هو عبارة عن تجربة فكرية تتكون من صندوق (انظــر الــشكل1-12) مملوء بغاز مقسوم إلى قسمين يفصلهما جدار له باب صغير يمكن غلقه و فتحــه بواســطة شيطان. القانون الثاني للثرموداينمكس (انظر إلى الفصل الثالـــث) يــنص علــى أن كميــة الإنتروبي في نظام مغلق لا تنقص أبدا. الإنتروبي هي كمية عدم الانتظام في نظـــام أو فـــي هذه الحالة كمية الطاقة. يستطيع الشيطان، نظريا، أن يفتح و يغلق الباب بطريقة تقلل مـــن كمية الإنتروبي في النظام.

وهنا نبين قائمة من الخطوات لفهم المشكلة:

1. لدينا صندوق مليء بالجسيمات التي لها سرعات مختلفة (مبينة بالأسهم).
2. يفتح الشيطان الباب و يغلقه فـــي مركـــز الصندوق ليسمح للجسيمات بالمرور مـــن خلاله.
3. يفتح الشيطان الباب فقــط عنــدما تقــدم جسيمات سريعة من اليمين و بطيئة مـــن اليسار.
4. و بذلك ينتهي المطاف بالجسيمات السريعة على جهة اليسار، و البطيئة على اليمـــين.



الشكل(1-12): شيطان ماكسويل

يصنع الشيطان فرق في درجة الحرارة بدون إنجاز أي شغل (وهذا ينتهك القـــانون الثاني للثرموداينمكس).

5. لقد استطاع كلا من Rolf Landuaer and R.W.Keyes مـــن تحليـــل الأحجيـــة عندما فحصا الكلفة الثرموديناميكية لمعالج المعلومات. إن ذهن الـــشيطان يـــصبح " أسخن " عندما تخزن ذاكرته النتائج وتكون العمليات عكوس حتى تمسح ذاكرته.

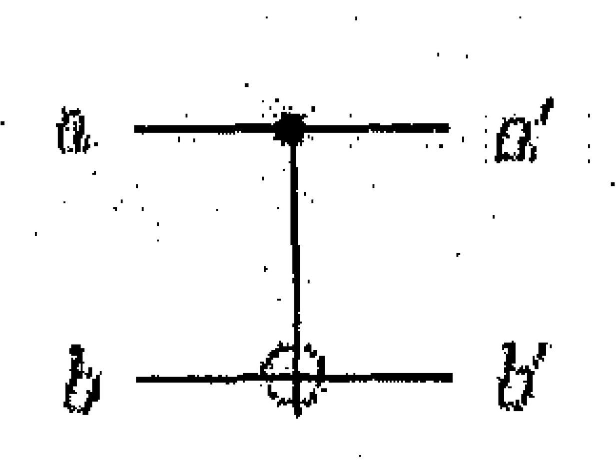
6. تقريبا يمكن إنجاز أي شيء بطريقة عكوس (بدون كلفة انتروبي).

13-1 الحوسبة العكوس Reversible Computation

في سنة 1973 وسع Charles Bennett عمل Landauer و تساءل فيما إذا كان بالإمكان، بشكل عام، إنجاز مهام حاسوبية دون أن يكون هناك ضياع في الحرارة. ففقدان الحرارة ليس مهما للذرات الكمية، لكن كون الميكانيك الكمي عكوس فيجب بناء الحاسبات الكمية من بوابات عكوس.

نستطيع محاكاة أي بوابة كلاسيكية ببوابات عكوس. على سبيل المثال، بوابة NAND العكوس يمكن صنعها من بوابة عكوس تسمى بوابة توفولي Toffoli.

تستخدم البوابات العكوس خطوط سيطرة يمكن أن تغذى في دارات عكوس من ancilla bits(التي هي بتات شغل). البتات في الدارات العكوس يمكن أن تستمر لتصبح garbage bits التي تكون هناك لتأكيد العكوسية فقط. خطوط السيطرة تؤكد بان لدينا بتات كافية لتغطية المدخلات من المخرجات. إن السبب الذي سميت به خطوط السيطرة هو أنها تسيطر (كما هو الحال في لعبارة if statement في البرمجة) على فيما إذا كان بالإمكان تطبيق عملية منطقية على بت غير مسيطر عليه على سبيل المثال في CNOT أدناه، تطبق عمل NOT على بت b إذا كان بت السيطرة فعالا (=1). أدناه بعض البوابات العكوس الشائعة وجداولها الحقيقية:



CNOT			
a	b	a'	b'
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

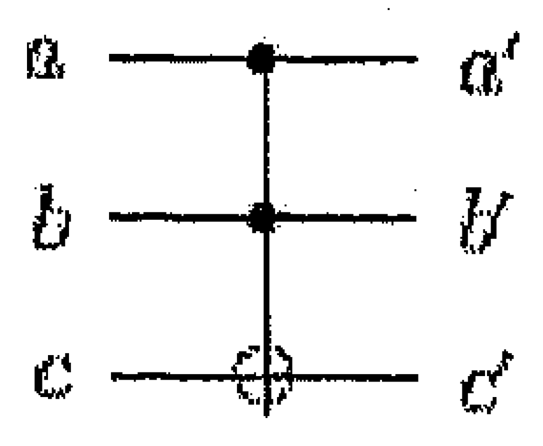
الشكل(1-13)

Controlled NOT المسيطر NOT 1-13-1

مثل بوابة NOT (on b) ولكن بخط سيطرة، a. كذلك فيمكننا وصـــف b' كالتـــالي aXOR b.(أنظر الشكل(1-13)).

صفات بوابة CNOT، CNOT(a,b):

CNOT(x,0): b'=a'=a=FANOUT



Toffoli					
a	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

الشكل(1-14)

1-13-2 بوابة توفولي Toffoli Gate

إذا كان خطي السيطرة يقلبان البت الثالثة فان بوابة Toffoli تسمى أيضا controlled-controlled NOT.(أنظر الشكل(1-14)).

صفات بوابة توفولي $T_F(a,b,c)$

TF (*a; b; c*) = (*a; b; c* XOR(*a* AND *b*)):
TF (1; 1; *x*) : *c0* = NOT *x:*
TF (*x; y;* 1) : *c0* = *x* NAND *y:*
TF (*x; y;* 0) : *c0* = *x* AND *y:*

$TF(x; 1; 0) : c0 = a = a0 =$ FANOUT.

ربط بوابات توفولي يمكن أن يحاكي بوابة فريدكن Fredkin gate.

1-13-3 بوابة فريدكن Fredkin Gate

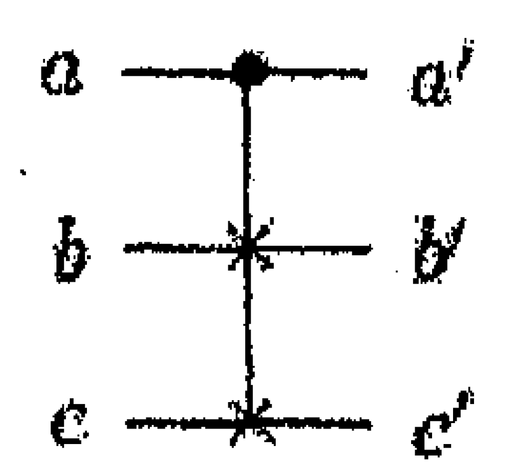
إذا أُعد خط السيرة فإنه ينكز Flips الثنائي الثاني والثالث (أنظر الشكل(1-15)). أما صفات بوابة فريدكن $F_R(a,b,c)$ فهي:

Properties of the Fredkin Gate, $F_R(a,b,c)$:

$F_R(x,0,y) : b' = x$ AND y.

$F_R(1,x,y) : b' = c$ and $c' = b$, which is CROSSOVER.

$F_R(x,1,0) : c' = a' = c =$ FANOUT, with $b' =$ NOT x.



Fredkin					
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

الشكل((1-15)

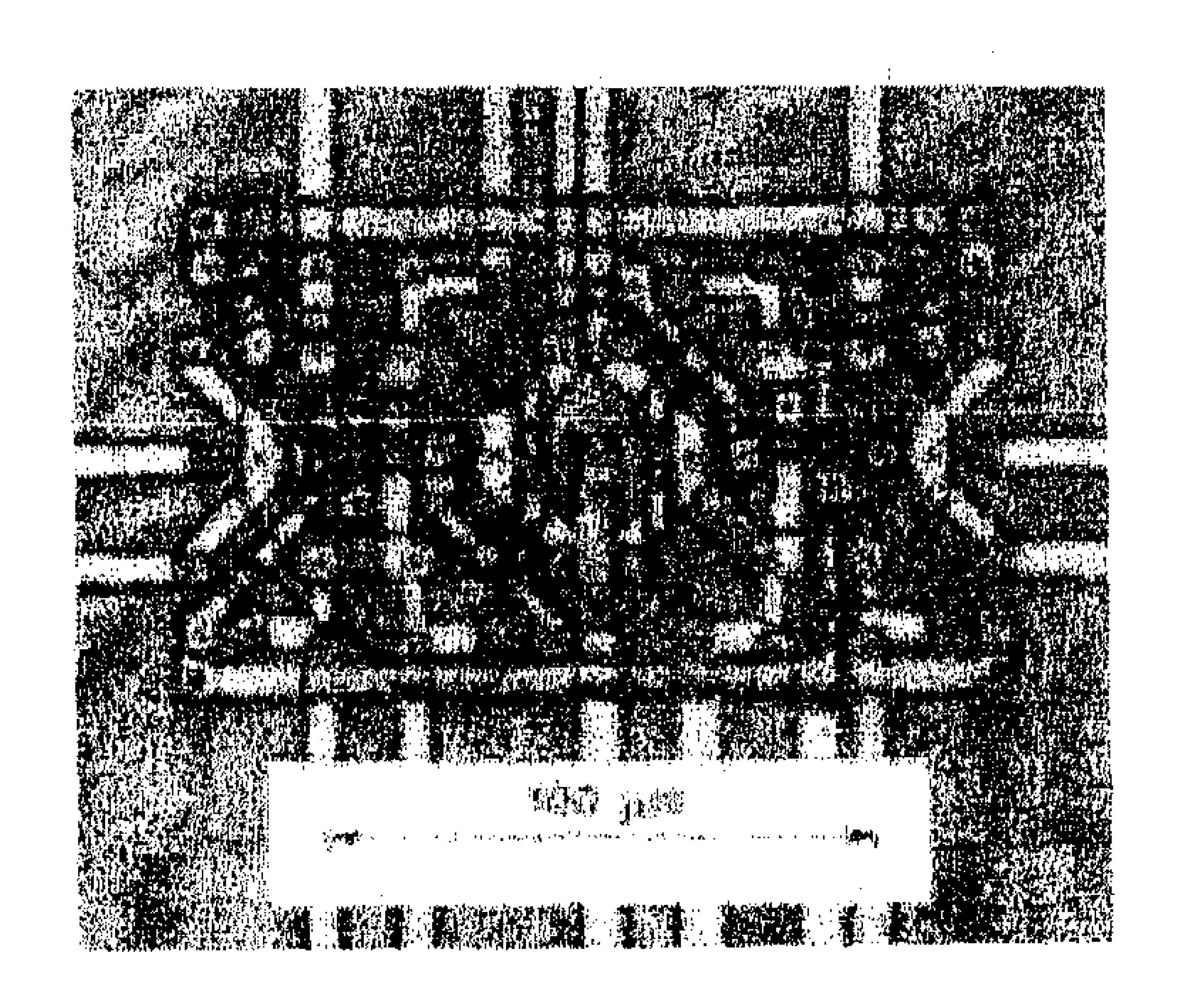
1-14 الدارات المعكوس Reversible Circuits

لقد وظفت الدارات العكوس بطريقة كلاسيكية، كمثال على دارة عكـوس مبنيـة مـن تكنولوجيا مألوفة مبين في الشكل (1-16) . الحاسبات الكمية تـستخدم دارات عكـوس لتوظيف خوارزميات كمية. يحتوي الفصلان 6 و 7 على العديد من الأمثلة عـن هـذه الخوارزميات و داراتها المرافقة.

1- الذكاء الصناعي Artificial Intelligence

هل تستطيع الخوارزمية أن تفكر؟ هذا ما نسأله حقا عندما نسأل هل يستطيع الحاسب أن يفكر؟ لأن معمارية الحاسبات الحديثة اعتباطية. هذا هو نوع الذكاء الذي يختبر باستخدام اختبار تورنك الذي يسأل ببساطة فيما إذا كان بالإمكان الإقرار بـأن الاسـتجابات مـن مصدر مخفي أهي صناعية أم إنسانية. قال تورنك إذا لم يستطع أحدنا التمييز بين الاثنين فإن المصدر يمكن أن يعتبر ذكي. يسمى هذا AI القوي، و لكن طريقة أكثر واقعية تلك التي تستخدم فيها نمذجة العمليات الذهنية في دراسة العمليات الذهنية الحقيقيـة يـسمى weak AI .

2.7.2 الذكاء والحاسب الكمي Quantum computers and Intelligence



الفكرة التي تقول أن الوعي والميكانيك الكمي مرتبطان هي لب النظرية الأصلية للميكانيك الكمي. هناك تأويلين لمعنى الوعي. المفهوم السقراطي الذي يعتبر أن التفكير الواعي هو نتاج المخ والديمقرطي الذي يعتبر أن الوعي هو خاصية أساسية للواقعية التي يمتلكها الدماغ. في الوقت الراهن تسود وجهة النظر السقراطية.

الفصل الثاني

الميكانيك الكمي Quantum Mechanics

2-1 المقدمة

لقد وضع نيوتن أسس الميكانيك الكلاسيكي قبل أكثر من ثلاثمائة سنة، ووضع ماكسويل معادلات الكهرومغناطيسية قبل أكثر من مائة سنة. في ذلك الزمن قال البعض بأنه لم يبق في الفيزياء ما يستحق البحث والعمل من أجله فكل شيء قد تم وليس للأجيال القادمة ما يستحق العناء. لكن ما إن بدأ القرن العشرون حتى بدأ التصدع يظهر في صخرة التفكير الكلاسيكي فقد ظهرت النسبية وبدأت بوادر الميكانيك الكمي بالظهور. جاءت النسبية أولا لتعالج فيزياء الأجسام ذات الأسرع العالية، بعد ذلك جاء الميكانيك الكمي الذي يصف فيزياء الأشياء الصغيرة.

إذن فبشكل عام يهتم الميكانيك الكمي بتصرف الأشياء الصغيرة جدا. عند هذا المقياس تصبح المادة مكممة، و هذا يعني أنها لا يمكن أن تقسم أكثر. لم يكن الميكانيك الكمي في يوم من الأيام خطأ، فهو يصف لماذا تضيء النجوم، كيف تتركب المادة، الجدول الدوري، و العديد من الظواهر الأخرى. يطمح العلماء أن يستطيعوا في يوم من الأيام وصف كل شيء بواسطة الميكانيك الكمي، لكن حاليا تبقى النظرية غير كاملة لأنها لم تربط بعد بنجاح مع النظريات الكلاسيكية للجاذبية.

تحدث بعض الأشياء الغريبة على المقياس الكمي، والظواهر التالية مهمة للحوسبة الكمية.

- **التراكب و التداخل Superposition and Interference**
- **الريبة Uncertainty**
- **التشابك Entanglement**

ينقسم هذا الفصل إلى جزأين. الجزء الأول سوف يتناول باختصار تاريخ الميكانيك الكمي. بعد ذلك، في الجزء الثاني سوف نتناول بعض المفاهيم المهمة (كالمذكورة أعلاه) للميكانيك الكمي مع توضيح طريقة ارتباطها بالحوسبة الكمية.

2-2 الفيزياء الكلاسيكية Classical Physics

نعني بالفيزياء الكلاسيكية تلك التي ازدهرت قبل القرن العشرين، أو قبل الفيزياء الكمية. هناك نظريتان من أكثر النظريات الكلاسيكية أهمية هما الكهرومغناطيسية لماكسويل 1831-1879 (الشكل 2-1) وميكانيك نيوتن. اسحق نيوتن 1642-1727 (الشكل 2-1) هو من أكثر العلماء أهمية نظرا لأتساع العمل الذي أنتجه والذي لا يزال حيا لأيامنا هذه. قبل هاتين النظريتين ابتكر كل منNicolaus Copernicus 1473-1543 و Galileo Galilee1564-1642 (الشكل4-2) الطريقة العلمية الحديثة (يمكن أن نذكر أيضا Leonardo Davinci 1452-1519) وذلك باختبار النظريات بالملاحظة والتجريب.



الشكل(4-1): اسحق نيوتن وكارل

الفيزياء الكلاسيكية لها عدد من الفرضيات الأساسية وهي:

- يعتبر الكون بمثابة ماكنة عظيمة.
- السبب والتأثير Cause and effectأي أن كل الحركات الغير منتظمة و الأفعال يكون سببها شيئا ما (الحركة المنتظمة لا تحتاج لسبب وهذا هو مبدأ غاليلو للقصور).



الشكل(4-2): غاليلو ونلسن كوبرنيكوس

- الحتمية Determinism إذا عرفنا حالة حركة الآن عندئذ وبسبب أن الكون قابل للتنبؤ، نستطيع القول بالضبط ما كانت عليه هذه الحركة وما ستكون عليه عند أي زمن.
- الضوء هو موجة توصف تماما بمعادلات الموجة لماكسويل وهي أربع معادلات تصف كل الظواهر الكهربائية و المغناطيسية .
- توجد الجسيمات والموجات لكنها مختلفة الواحدة عن الأخرى.
- نستطيع قياس أي نظام إلى دقة غير معينة وأن نصحح أي أخطاء ناتجة عن أداة القياس.

2-3 مفاهيم مهمة Important Concepts

2-3-1 الذرات Atoms

كي نتقدم في تناولنا للميكانيك الكمي هناك بعض المفاهيم المهمة في الفيزياء الكلاسيكية التي يجب أن تكون لدينا فكرة عنها. وهذه المفاهيم هي الذرات، الثرموداينمكس، والتحليل الإحصائي.

لقد اقترح الفلاسفة الإغريق أمثال Leucippus و Democritus في القرن الخامس قبل الميلاد " حاولت البحث خلال هذه الفترة عن التفكير البابلي في هذا المجال إلا أنني لم أعثر على ما يسعفني من مادة لوضعها بين يدي القارئ، لأني لا أعتقد بأن التفكير في الأشياء الدقيقة أقتصر على فلاسفة الإغريق " بأن المادة تتكون من جسيمات صغيرة جدا تسمى الذرات Atoms. و كلمة الذرة Atom جاءت من كلمة إغريقية تعني " ذلك الشيء الغير قابل للقسمة". كالعادة يقفز مؤلفو الكتب الأجنبية متناسين الحقبة الزمنية التي كانت فيها الأمة العربية الإسلامية مصدر النور و الخير و المحبة للعالم أجمع، حيث يدون هؤلاء المؤلفون أن التفكير في هذا الموضوع ظل كما هو حتى بدايات القرن التاسع عشر عندما اقترح الكيميائي الإنجليزي John Dalton (1766-1844) بأن لكل عنصر كيميائي معروف هناك ذرة من المادة، لكن أحب أن أستوقف القارئ عند الآيتين الكريمتين رقم 7 و 8 من سورة الزلزلة قال تعالى : " **فمن يعمل مثقال ذرة خيراً يره** (7) **و من يعمل مثقال ذرةٍ شرا يره**(8) " يا ترى ما الذي تعنيه كلمة ذرة هنا حقيقة؟!! و كيف تعامل معها العلماء العرب و ليس المفسرون؟!! أو



الشكل(2-3)

قوله تعالى في سورة النساء آية 40 " **إن الله لا يظلم مثقال ذرة و إن تك حسنة يضاعفها و يؤتي من لدنه أجراً عظيما** " أو في سورة سبأ آية 3 "**وَقَالَ الَّذِينَ كَفَرُوا لَا تَأْتِينَا السَّاعَةُ قُلْ بَلَى وَرَبِّي لَتَأْتِيَنَّكُمْ عَالِمِ الْغَيْبِ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ فِي السَّمَاوَاتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ وَلَا أَصْغَرُ مِن ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ**" مرة أخرى نقول كيف تعامل العلماء المسلمون مع فكرة أن هناك أصغر من الذرة ألم تجعلهم يفكرون بتركيب المادة؟! أم أن عقولهم آنذاك لم تتعدى الملموس من الأشياء؟!! ألا يعكس هذا ضرورة التفكير في أن هناك أشياء صغيرة وأن المادة مرجعها إلى أشياء صغيرة؟! إن أي مادة في الكون ما هي إلا ارتباط معين للذرات المنفصلة. ثم اكتشف J.J.Thomsos (1856-1940) ، الفيزيائي الإنجليزي ، الإلكترون Electron الذي كتلته $m_e = 9.1095 \times 10^{-31}$ Kg . الإلكترون المكتشف الجديد كان الجسيم الأساسي الذي يحمل أصغر شحنة سالبة

2-3-2 الثرموداينمكس Thermodynamics

الثرموداينمكس هو نظرية الطاقة الحرارية. تفهم الحرارة بأنها طاقة غير منتظمة، على سبيل المثال الطاقة الحرارية في غاز ما هي إلا الطاقات الحركية لكل الجزيئات. أما درجة الحرارة فهي مقياس لمقدار سرعة الجزيئات (في الحالة السائلة و الغازية، أما في المادة الصلبة، فمقياس لسرعة اهتزاز الجزيئات حول مراكزها الثابتة في الصلب) يتكون الثرموداينمكس من قانونين.

- **القانون الأول للثرموداينمكس The First Law of Thermodynamics**

القانون الأول للثيرمو داينمكس هو قانون حفظ طاقة حيث ينص على:

"**إن الطاقة الحرارية ΔQ المزودة لنظام معين تساوي الزيادة في طاقته الداخلية ΔU مضافا إليه الشغل المنجز ΔW من قبل النظام على المحيط** " أي أن:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (2.1)$$

مصطلح الطاقة الداخلية Internal Energy يحتاج إلى توضيح. الطاقة الداخلية لنظام هي مجموع الطاقات الحركية و الكامنة لجزيئات النظام. ومن المعادلة (2.1) يبدو واضحا أن إعطاء النظام حرارة أو إنجاز شغل عليه فإن ذلك سيسهم في زيادة الطاقة الداخلية. عندما تتغير الطاقة الداخلية لنظام فإن التغير سيعتمد على الحالتين الابتدائية و النهائية للنظام و ليس على كيف حدث ذلك التغيير. ويمكننا القول أنه نظام مغلق، كلما اختفت كمية معينة من الطاقة في مكان معين يجب أن تظهر كمية مكافئة في مكان آخر في النظام و بشكل معين.



الشكل(2-4): رودولف سلسيوس و هيرمان فون هيلمهولتز

قانون حفظ الطاقة هذا صيغ أصلا من قبلHerman Von Helmholtz 1874 – 1894) الشكل 2-4) .

- **القانون الثاني للثرموداينمكس**The Second Law of Thermodynamics

يمكننا القول أنه لا توجد ماكنة حرارية تعمل بدورة يمكن أن تحول الحرارة إلى شغل بالكامل وذلك طبقا للقانون الأول. ولو تركنا كوب شاي ساخن على الطاولة فإنه سيبرد ولا يمكن أن يسخن. لذلك فللطبيعة اتجاه واحد لحدوث العمليات. إن القانون الثاني للثرموداينمكس هو النص الرسمي الذي يبين اتجاه حدوث العمليات الحرارية. أحد نصوص القانون الثاني الذي يطلق عليه **نص كلفن-بلانك مفاده: " لا توجد عملية هدفها الوحيد هو امتصاص حرارة من خزان وتحويلها بشكل كامل إلى شغل ميكانيكي".**

إذا لم يكن القانون الثاني صحيحا، لكان بإمكاننا أن نُسيّر البواخر على الحرارة المستخلصة من البحر. لكن لا نستطيع فعل ذلك، لأن القانون الثاني يتطلب وجود خزان درجة حرارته أقل من درجة حرارة البحر لتفريغ جزء من الحرارة فيه، وليس هناك مثل هذا الخزان عدا الثلاجات التي على سطح الباخرة وهي نفسها تستهلك طاقة حتى تبرد.

للعالم كلاسيوس صياغة أخرى للقانون الثاني وهي:"لا توجد عملية هدفها هو نقل حرارة من جسم بارد إلى آخر أسخن منه" ويقينا فإننا لا نستطيع نقل حرارة من الثلاجة إلى المحيط الخارجي ما لم نبذل شغلا.

إذن فليس هناك إمكانية لتحويل كل الحرارة إلى شغل، لماذا؟ لأن الحرارة تختلف عن أنواع الطاقة الأخرى. ذلك لأن الحرارة التي يمتلكها أي جسم تنتج عن الحركة العشوائية لجزيئاته. وهذا يختلف عن الطاقة الحركية التي يمتلكها ذلك الجسم والتي هي نتيجة للحركة المنتظمة التي تمتلكها الجزيئات متراكبة على حركتها العشوائية. لذلك فعندما نحاول تغيير الحركة الجزيئية العشوائية إلى حركة منتظمة، فإننا لا نستطيع فعل ذلك 100% لأننا غير قادرين على التحكم بحركة الجزيئات العشوائية. هل هذا يعني أنه لو كان بمقدورنا أولا أن نتوصل إلى وسيلة للسيطرة على الحركة العشوائية للجزيئات بحيث نجعلها مثلا في اتجاه واحد..نقول لو أن ذلك ممكنا فهل سيجعل إمكانية تحويل الحرارة إلى شغل بشكل كامل أي بكفاءة 100%؟!! ربما تتوصل لإجابة على هذا السؤال لو أنك فهمت عميقا طبيعة هذه الحركة الاهتزازية وكيف تهتز الجزيئات؟ وهل أن الجزيئة تهتز على أنغام معينة أم أنها تهتز على أي نغم يطرق مسامعها؟ نترك الإجابة لخيالك.

في سنة 1865 أدخل كلاسيوس مفهوم الانتروبيا ليشير للعمليات الممكنة الحدوث وغير الممكنة. إذا تغير نظام ثرموديناميكي من حالة اتزان إلى حالة أخرى بسلسلة من الزيادات فإننا نقول أن النظام يخضع لعملية عكوس reversivle process. لذلك فإذا تغير نظام ثرموديناميكي من حالة اتزان إلى أخرى على طول خط عكوس فإن التغير في انتروبيا النظام يعطى بالعلاقة:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \qquad (2.2)$$

فالتغير في انتروبيا 5kg من الثلج عند $0^{o}C$ عندما يتحول إلى ماء عند $100^{o}C$ هو:

$$\Delta Q = mL_f = (5)(80) = 400kcal$$

$$\therefore \Delta S = \frac{400kcal}{273K} = 1.47kcal / K$$

متى ما أضيفت حرارة للنظام كانت ΔQ موجبة وبالتالي فإن ΔS موجب. أما إذا لفظ النظام حرارة فإن كلاهما سيكون سالبا.

هناك فرق بين الانتروبيا والطاقة، فنحن نعلم أن أي جسم يسقط من مكان مرتفع إلى مكان أدنى منه فإنه سيفقد من طاقة وضعه. على النقيض من ذلك، فإننا نجد أن نظام ثرموديناميكي مغلق ينتقل من انتروبيا أقل إلى انتروبيا أعلى. أي أن هناك رغبة للأنظمة لزيادة الانتروبيا..وهذه الحقيقة يمكن الاستفادة منها لمعرفة اتجاه حدوث العمليات. فمثلا إذا كانت لدينا حالتين A و B وكان النظام في حالة A فإننا نجد $\Delta S = S_B - S_A$ فإذا كانت $\Delta S > 0$ فإن انتقال النظام من الحالة A إلى الحالة B ممكنة، أما إذا كانت سالبة فإن ذلك يعني استحالة الانتقال.

إذن يمكننا التوصل إلى نص آخر للقانون الثاني للثمودداينمكس وهو **أن انتروبيا أي نظام معزول يزداد في كل عملية طبيعية، والعمليات الممكنة هي التي يزداد فيها الانتروبيا أو يبقى ثابتا.** انتروبيا النظام غير المعزول يمكن أن يزداد أو ينقص وذلك يعتمد على امتصاص أو فقدان الحرارة. أما إذا كانت العملية أدياباتيكية، أي $\Delta Q = 0$، فإن $\Delta S = 0$ أيضا وتسمى هذه العملية **آزانتروبك Isoentropic process** أي العملية الحادثة عند ثبوت الانتروبيا. والانتروبيا يكون مستقلا عن مسار حدوث العملية أيضا كما هو الحال بالنسبة للطاقة الداخلية. لاحظ كذلك أن درجة الحرارة T يجب أن تكون ثابتة، فإذا لم تكن كذلك فإننا يجب أن نستخدم حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الانتروبيا، رغم أننا بعض الأحيان يمكن أن نستخدم معدل درجة الحرارة لحسابه، إذن في هذه الحالة يمكننا التعبير عن التغير في الانتروبيا كالتالي:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \qquad (2.3)$$

حيث أن التكامل يعبر عن مجموع النسب بين كميات الحرارة إلى ما يقابلها من درجات الحرارة على طول المسار من 1 إلى 2.

إن العلاقتين (15.10) و (15.1) يصحان فقط للعمليات العكوس عندما يتغير انتروبيا نظام فإن التغير يعتمد فقط على الحالتين الابتدائية والنهائية وليس على نوع العملية فيما

إذا كانت عكوس أو غير عكوس. وهذا لا يتناقض مع قولنا أن المعادلتين المذكورتين تصحان فقط للعمليات العكوس لأن $\int \frac{dQ}{T}$ لعملية عكوس هو ليس نفسه لعملية غير عكوس. أما عندما تكون العملية دورية فإن التغير في الانتروبيا يكون صفرا. وعندما تنجز الدورة بشكل عكوسي يكون الانتروبيا المفقود من المصدر مساويا لذلك المكتسب من قبل المصرف sink لذلك فسيكون التغير الإجمالي في انتروبيا الكون (المصرف+المصدر+المادة العاملة) مساويا للصفر. لكن إذاك كانت العملية الدورية غير عكوس ورغم أن الانتروبيا المفقود من المصدر أقل من ذلك المكتسب من المصرف ورغم أنه ليس هناك تغير في الانتروبيا للمادة العاملة، إلا أن هناك زيادة في انتروبيا الكون كله.

مثال(2-1): احسب التغير في انتروبيا 5kg من الماء عندما تسخن عكوسيا من 0^oC إلى 100^oC(السعة الحرارية النوعية للماء في هذا المدى من درجات الحرارة هي $c=2x10^3J/kg.^oC$).

الحل:

$$\Delta S = \int_{273}^{373} \frac{dQ}{T} = \int \frac{(5)(4\times10^3)dT}{T} = 21\times10^3 \ln T\Big|_{273}^{373} = 6.55\times10^3 J/K$$

في سنة 1859 و باستخدام النموذج الذري استطاع ماكسويل J.C.Maxwell أن يتوصل لطريقة استطاع من خلالها الحصول على المعدل الإحصائي لسرع جزيئات غاز مختارة بشكل عشوائي في نظام مغلق مثل صندوق (لأنه كان من المستحيل تتبع مسار كل جزيئه على حدة). تذكر أن الجزيئات الأسخن هي الأسرع.

في سنة 1870 عمم بولتزمان 1844 –1906 Ludwing Boltzmann (الشكل2-5) النظرية لأي تجمع من الأشياء التي تتفاعل بشكل عشوائي و مستقلة و حرة الحركة. لقد أعاد صياغة القانون الثاني ليصبح .

كلما قلت الطاقة في نظام معين فإن ذرات النظام تصبح غير منتظمة أكثر و هناك زيادة في الانتروبيا. لقياس هذا اللاانتظام نأخذ بنظر الاعتبار عدد الهيئات أو الحالات التي يمكن أن تكون عليها الذرات.

إذا كان هذا العدد هو W فإن الانتروبيا يعرف كما يلي :

$$S = k\ln(W) \qquad (2.4)$$

حيث $k = 1.38\text{x}10^{-23}$ J/K هو ثابت بولتزمان. و عليه فتصرف "الأشياء الكبيرة " يمكن أن يتم التنبؤ به عن طريق معرفة معدل التصرف الإحصائي لأجزائه الصغيرة، و الذي هو مهم للميكانيك الكمي. كذلك فقد بقي احتمال حدوث تقلب fluctuation، فاللا احتمال الإحصائي الذي ربما يبدو هراء ولكن مع ذلك يتوجب على النظرية أن تزودنا بشئ عنه. على سبيل المثال، إذا كان لدينا صندوق يحتوي على غاز فالتقلب يمكن أن يكون بحيث أن كل الجسيمات تتكتل بشكل عشوائي معا في إحدى زوايا الصندوق.




الشكل(2-5): نيلز بور و لودوك بولتزمان

2-4 تجارب مهمة Important Experiment

هناك فترتان رئيستان في تطور نظرية الكم، الأولى بلغت ذروتها سنة 1913 مع نموذج نيلزبور الذري 1585 – 1962 وانتهت تقريبا في سنة 1942. و هذا يسمى بالنظرية الكمية القديمة. أما النظرية الكمية الجديدة فقد بدأت سنة 1925. لقد طورت النظرية القديمة في بعض أجزاءها لتفسير نتائج ثلاث تجارب لم يكن بالإمكان تفسيرها بالاعتماد على الفيزياء الكلاسيكية ، هذه التجارب هي:

- إشعاع الجسم الأسود، والكارثة فوق البنفسجية. **Black body radiation, and the ultraviolet catastrophe**

- الظاهرة الكهروضوئية .Photoelectric effect
- الأطياف الخطية اللامعة.Bright line spectra

سنتطرق لهذه التجارب بشكل مختصر فيما يلي:

2-4-1 إشعاع الجسم الأسود Black Body Radiation

أي جسم اسود يمتص كل الأشعة الكهرومغناطيسية (الضوء) التي تسقط عليه فيظهر أسودا لمراقب وذلك لأنه لا يعكس الضوء. لمعرفة درجة حرارة جسم أسود يجب علينا ملاحظة الأشعة المنبعثة منه.



الشكل(2-6): بالمر و أينشتاين

مرافقو ماكس بلانك 1858-1947 قاسوا توزيع الإشعاع والطاقة في فجوة Cavity، نوع معين من الأفران يحتوي على ثقب صغير يمكن لكمية صغيرة من الحرارة أن تهرب منها (ضوء، أشعة) للمراقبة. ولأن الأشعة محجوزة في الفجوة فإنها تستقر عند توزيع متزن للجزيئات في غاز. لقد وجدوا بأن توزيعات التردد مشابه لتوزيعات السرعة لماكسويل. أما لون الضوء المنبعث فيعتمد على درجة الحرارة. على سبيل المثال عنصر الفرن الكهربائي يذهب من الأحمر الحار إلى الأبيض الحار بزيادة درجة الحرارة. لم يستغرق وقتا طويلا من الفيزيائيين أن يطبقوا طريقة التحليل الإحصائي لماكسويل لموجات الطاقة الكهرومغناطيسية الموجودة في الفجوة. الفرق هو أن الفيزياء الكلاسيكية كانت ترى الموجات مستمرة والذي يعني إمكانية رزم موجات أكثر وأكثر داخل الصندوق كلما أصبح الطول ألموجي أصغر، أي أن التردد أصبح أعلى. وهذا يعني بأنه كلما رفعت درجة الحرارة كلما أصبحت الأشعة أقوى وأقوى بدون حدود. هذا ما كان يسمى بمأزق الأشعة فوق البنفسجية. إذا كانت الطبيعة تتصرف بهذه الطريقة حقا فإنك لتنشيط (تحرق سطحيا) بجلوسك أمام نار بواسطة كل الضوء البنفسجي الآتي منها. لحسن الحظ ما كان لهذا أن يحدث والمأزق ليس في الطبيعة بل في الفيزياء الكلاسيكية التي

تنبأت بشيء لا يحدث. نتائج عدة تجارب أعطت التوزيع الصحيح للتردد وكان ماكس بلانك هو الذي أوجد صيغة تتوافق مع النتائج. لم يستطع أن يجد حل كلاسيكي، لذلك استخدم بلانك، بتذمر، صيغة بولتزمان للقانون الثاني للثرموداينمكس. لقد تصور بلانك بأن الموجات المنبعثة من الجسم الأسود ناتجة عن عدد محدود من مذبذبات صغيرة (نوع من البشارة للذرات الحديثة). في النهاية كان عليه أن يقسم الطاقة لقطع محددة ذات حجم معين لتلاءم قاعدته للميكانيك الكمي

$$E = hf$$

حيث E هي الطاقة، و f التردد و h ثابت بلانك الذي مقداره $h = 6.626*10^{-34}$ J.s

2-4-2 الظاهرة الكهروضوئية The Photoelectric Effect

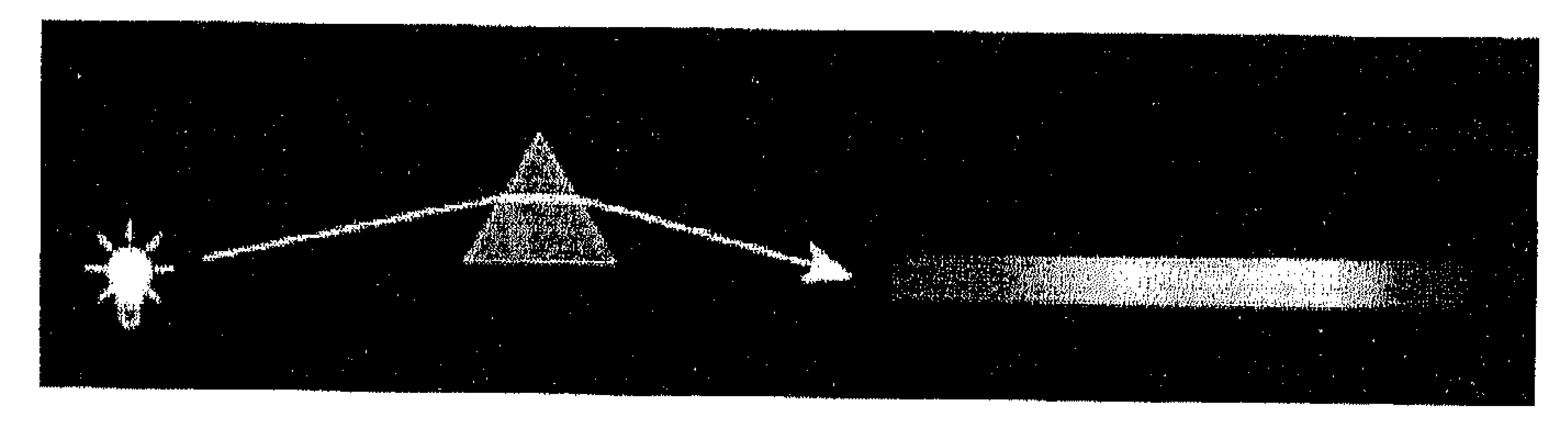
إذا سلط الضوء على أنواع معينة من المواد (على سبيل المثال بعض الفلزات أو أشباه الموصلات) فإن الالكترونات ستتحرر. عندما فحصت هذه الظاهرة وجد أن نتائج التجارب لم تكن لتتوافق مع النظرية الكهرومغناطسيسة الكلاسيكية التي تنبأت بأن طاقة الالكترونات المتحررة يجب أن تعتمد على شدة موجة الضوء الساقط. وعليه فقد وجد بأن الطاقة المتحررة كانت معتمدة لا على الشدة إنما على تردد الضوء (سيخرج الإلكترون مهما كانت الشدة منخفضة).

لقد بين اينشتاين 1879-1966 (الشكل 2-6) بأنه إذا نظرنا للضوء كتجمع لجسيمات تحمل طاقة تتناسب مع التردد (كما هو معطى بعلاقة بلانكPlanck) وإذا كانت هذه الجسيمات يمكن أن تنقل طاقة للالكترونات في هدف معدني فإن النتائج التجريبية يمكن أن تفسر. جسيم خفيف يصطدم بسطح معدني فتنتقل طاقته لإلكترون وتتحول إلى طاقة حركية، وعليه فإن الإلكترون يقذف من الفلز. إذا أختلف نوع الفلز يمكن لالكترونات أن تهرب بيسر أو عسر.

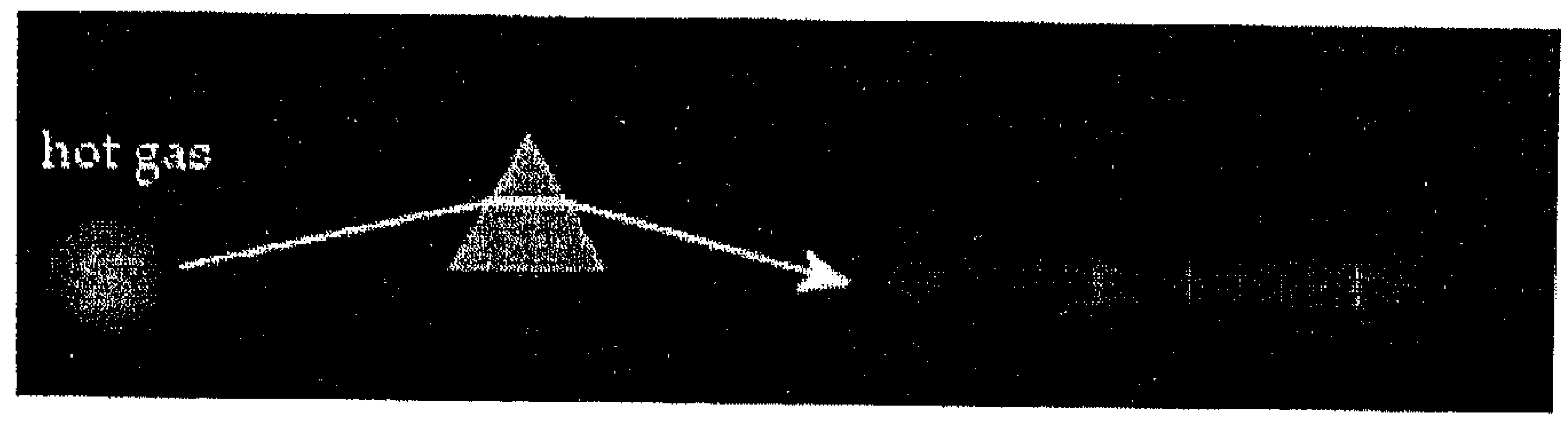
لقد كانت نظرية أينشتاين مهمة للغاية لأنها تعتبر أول تطبيق لمفاهيم الميكانيك الكمي، فالضوء يمكن أن تكون له صفة دقائقية بالإضافة إلى الصفة الموجية. لقد حصل أينشتاين على جائزة نوبل عام 1921 على عمله هذا.

2-4-3 الأطياف الخطية اللامعة Bright Line Spectra

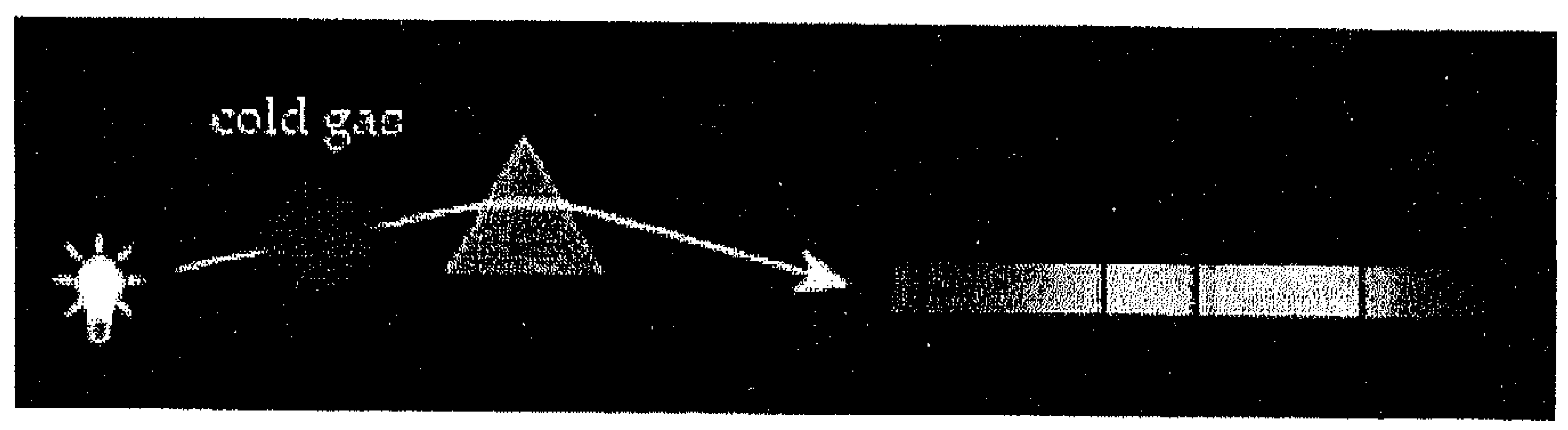
عندما تسخن مادة صلبة ويبعث ضوء أبيض عندئذ، إذا ركز الضوء وجـــزء إلـــى ألـــوان



الشكل(2-7): تحليل الضوء



الشكل(2-8): طيف انبعاث



الشكل(2-9): طيف

منفصلة بواسطة منشور، فإننا نحصل على قوس قزح مثل الطيف (طيف مستمر) كمـــا فـــي الشكل(2-7).

إذا فعلنا نفس الشيء مع غاز ساخن يبعث ضوء عندئذ يتكون الطيف من عدد من الخطوط اللامعة التي لها ألوان قوس القزح أعـــلاه تتخللـــه منـــاطق مظلمـــة. يـــسمى هـــذا خـــط انبعاثemission line كما موضح في الشكل(2-8). إذا وضعنا غاز بـــارد بـــين صـــلب

ساخن يبعث ضوء أبيض والمنشور نحصل على عكس الصورة أعلاه. وهذا يسمى طيف امتصاص كما مبين في الشكل(2-9).

إن الغاز الساخن يبعث ضوء عند ترددات معينة والمثال الثالث يبين لنا أن الغاز البارد يمتص الضوء عند نفس الترددات. هذه الخطوط تختلف باختلاف العناصر. وهي تسمح لنا بمعرفة تركيب غاز حتى لو كان على مسافات فلكية، وذلك بملاحظة طيفه.

الشكل(2-10): ثومسون و بلانك

في سنة 1885 توصل Johann Jakob Balmer 1825-1898 الشكل(2-6) إلى صيغة لأطياف الهيدروجين الخطية والتي تكتب كما يلي:

$$f = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad (2.6)$$

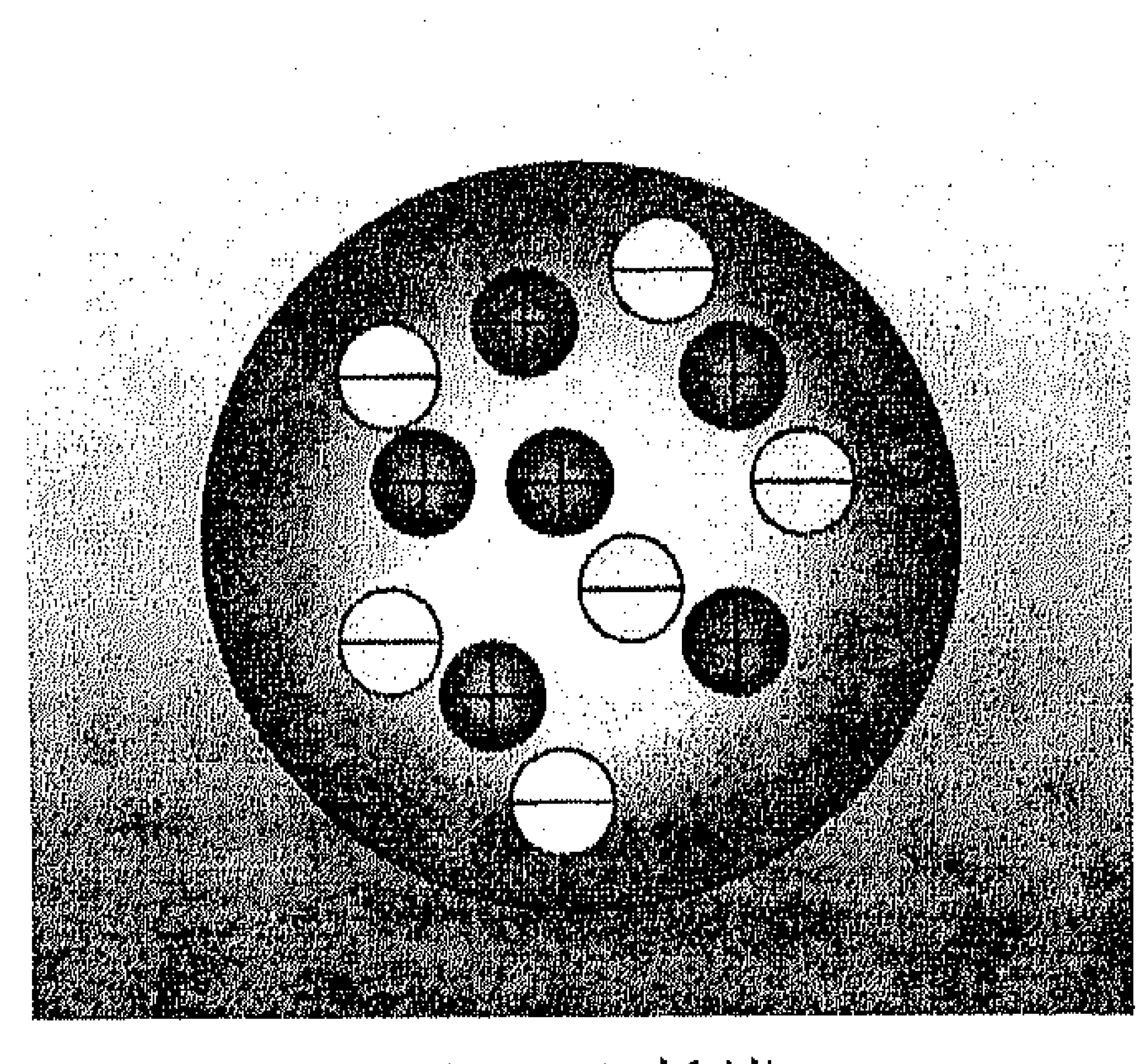
حيث R يسمى ثابت رايدبيرك Rydberg constant ومقداره $3.29163x10^{15}$ cycles/second و n_f و n_i هما عددان صحيحان. المشكلة كانت في أنه لم يكن أحد باستطاعته تفسير الصيغة. جاء التفسير على يد Niels Bohr سنة 1913 في نموذج بور للذرة.

5-2 ما قبل الميكانيك الكمي Proto Quantum Mechanics

خلال الجزء الأخير من القرن التاسع عشر تم اكتشاف أن عدد من الأشعة كان بالحقيقة جسيمات. واحد من هذه الجسيمات كان الإلكترون الذي اكتشفه Joseph J Thomson 1856-1940 (الشكل 2-10). لقد بين ثومسون خلال دراسته لأشعة الأنابيب الكاثودية بأن الجسيمات المشحونة (الالكترونات) تبعث عندما يسخن سلك. استمر ثومسون ليساعد في

تطوير أول نموذج للذرة الذي كان عبارة عن الكترونات (شحنات سالبة) محتواة داخل كـرة مشحونة بالشحنة الموجبة (الشكل 2-11).

لقد سمي أول نموذج ذري بنموذج حلـوى كرتسمس Christmas pudding. بعد ذلك، في سنة 1907، طـور رذرفـورد Ernest Rutherford 1871-1937 (الشكل 2-12) نموذجا جديدا توصل إليـه كنتيجـة لقـصف صفيحة ذهب بجسيمات ألفا (أيونات الهيليوم) وملاحظة ارتداد الجسيمات إلى الخلف. هـذا النموذج يتحدث عن نواة صـغيرة لكـن ذات كتلة كبيرة نسبيا والكترونات تحيط بها (الشكل 2-13).



الشكل(2-11)

النموذج الجديد كان مثل النظام الشمسي المصغر حيث تدور الالكترونات حول النواة، لكن النموذج الذري هذا كان يعتقد بأنه لا يزال يخضع لقواعد الفيزياء الكلاسيكية. ومـع ذلـك، فطبقا للنظرية الكهرومغناطيـسية الكلاسـيكية يجـب أن يـشع الإلكترون الدائر طاقة لأنه خاضع لتسارع مركزي وبالتالي يجب أن يسقط سريعا على النواة. لكن ذلك لم يحدث، فالذرات مستقرة، وكل ذرات عنصر معين تبعث نفـس الطيف الخطي. لشرح هذا افترض بور أن الذرة يمكن أن توجد فقط في حالات ثابتة معينة. نعني بالثابتة بأنه حتى في حالة دوران الإلكترون فان الذرة لا تـشع (لاحقـا خـضع هـذا الافتراض لتساؤل هايزنبيرك)، على الرغم مما تقوله النظرية الكهرومغناطيسية. ومع ذلـك،



الشكل(2-12): سومرفيلد و رذرفورد

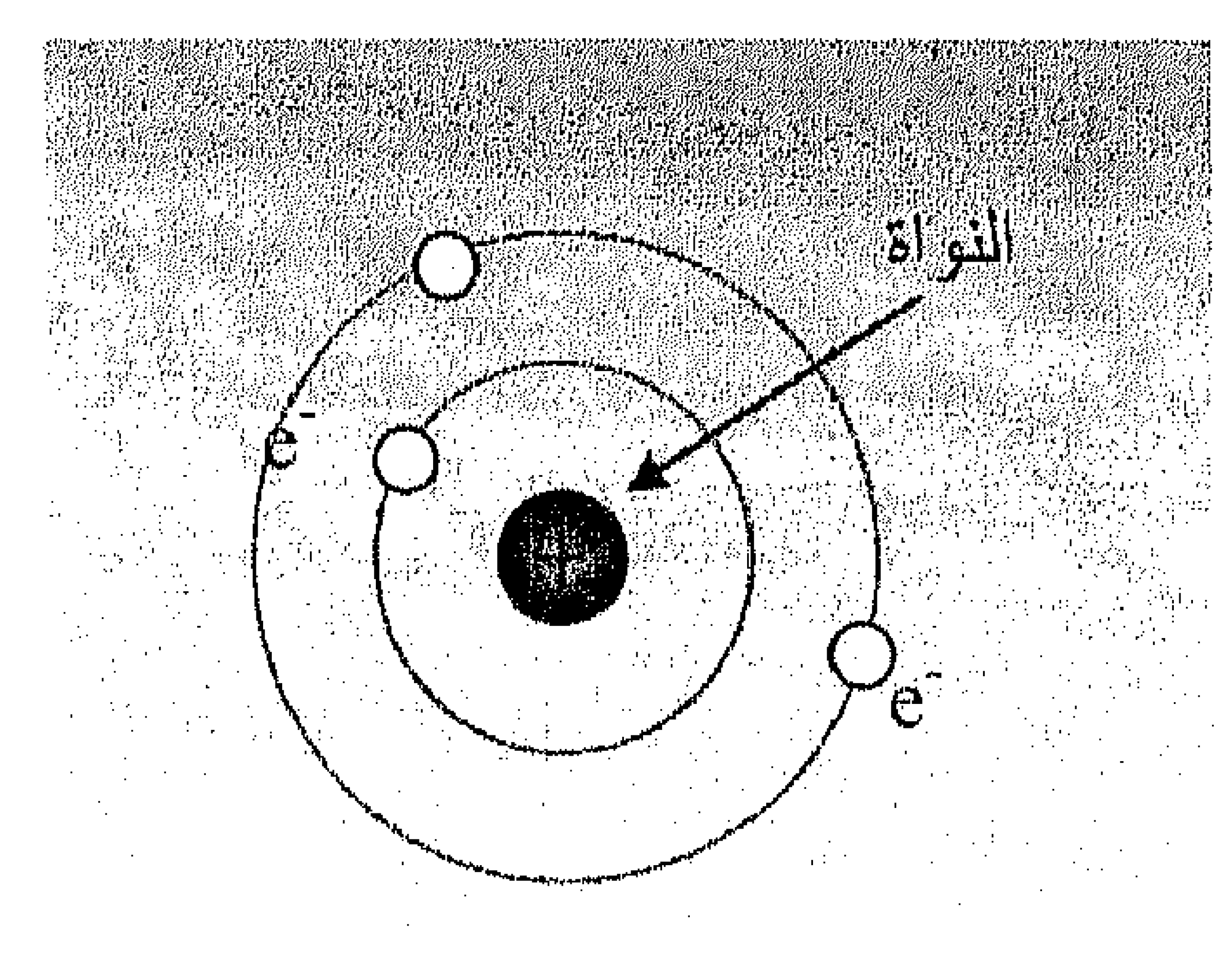
فإذا قفز من حالة ثابتة إلى أخرى أقل طاقة فإن الانتقال يصاحبه انبعاث فوتون، والعكس صحيح فهناك امتصاص للضوء عندما تنتقل الذرة إلى حالة ذات طاقة أعلى.

في هذا النظام هناك حالة ثابتة وهي الأكثر انخفاضا تسمى بالحالة الأرضية ground state لا يستطيع الإلكترون أن يقفز إلى ما دونها وهذه تعيد استقرار الذرة. تردد الضوء المنبعث عن قفز الإلكترون يعطي حسب صيغة أينشتاين:

$$f = \frac{E}{h}$$

حيث E هو الفرق في الطاقة للحالتين الثابتتين المشمولتين. هذه الطاقات للحالات الثابتة يمكن أن تحسب من الفيزياء الكلاسيكية إذا أدخل افتراض إضافي وهو أن الزخم الزاوي المداري orbital angular momentum مضاعف صحيح لثابت بلانك. بهذا الافتراض وجد أن الترددات المحسوبة مطابقة مع تلك الملاحظة. وعليه فقد طور بور نموذج مستند على أغلفة المدارات المستقرة والتي هي عدد معين من الأغلفة لكل ذرة. لقد كمم بور مدارات الإلكترون بوحدات ثابت بلانك. وأعطانا أول عدد من **الأعداد الكمية quantum number** والتي هي مفيدة في الحوسبة الكمية.

الحالة الأرضية عند n=1 (حيث n هو رقم المدار) والحالات المتهيجة عند n>1 لذرة معينة لها أهمية خاصة. استطاع بور تطوير صيغة لحساب نصف قطر مدارات الإلكترون في ذرة الهيدروجين:



الشكل(2-13)

$$r = \left(\frac{h^2}{4\pi^2 mq^2}\right) n^2$$

حيث r هو نصف قطر المدار، h ثابت بلانك و q , m هما كتلة وشحنة الإلكترون. مقدار r هو 5.3 نانوميتر للمدار الأول.

لقد استمر بور مع هذا النموذج كي يشتق قاعدة بالمر للهيدروجين وذلك بوضع فرضيتين:

1. الزخم الزاوي الكميQuantum angular momentum

$$L = n\left(\frac{h}{2\pi}\right) \quad (2.9)$$

2. القفز بين المدارات يؤدي إلى انبعاث أو امتصاص الأشعة طبقا للعلاقة:

$$hf = E_i - E_f \quad (2.10)$$

حيث E_i هي الطاقة الابتدائية للإلكترون و E_f هي الطاقة النهائية.



الشكل(2-14): دي برولي و باولي

بالرغم من أن النتائج المحسوبة كانت قريبة، إلا أنها لم تطابق النتائج التجريبية للخط الطيفي. بعد ذلك اقترح أرنولد سومرفيلد Arnold Sommerfeld 1868-1951 (الشكل 2-12) نموذجا جديدا بمدارات على شكل قطع ناقص مع إضافة عدد كمي جديد k للتعامل مع شكل المدار. ثم أدخل بور عدد كمي m لتفسير ظاهرة زيمان التي أنتجت خطوط طيفية أخرى عندما سلط مجال مغناطيسي على الذرة.

لكن سرعان ما تم اكتشاف أن m لا يمكن أن يفسر جميع خطوط الطيف ألمنتجه بواسطة المجالات المغناطيسية. لذلك أفترض باولي Wolfgang Pauli 1900-1958(الشكل 2-14) عدد كمي أخر كي يتولى تفسير ما حدث. لقد أعتقد البعض، لكن لم يكن ذلك الاعتقاد مقبولا من قبل باولي، إن الإلكترون " يبرم" حول نفسه ورغم أن اعتراض باولي كان صحيحا لكن الاسم ألتصق بكلمة **برم spin** و نحن لا نزال نستخدم عبارة برم للأعلى spin up و برم للأسفل spin down لوصف هذه الخاصية للإلكترون. ثم وصف باولي لماذا تملأ الإلكترونات مستويات الطاقة العليا و لا تشغل فقط الحالة الأرضية ground state القاعدة التي تسمى الآن **مبدأ الاستثناء لباولي Pauli exclusion principle**. لقد أستمر بور في وصف الجدول الدوري بدلالة الأغلفة المدارية حيث سمى الغلاف الخارجي بغلاف التكافؤ valence shell الذي يسمح بالارتباط و تكوين الجزيئات.

2-6 النظرية الجديدة للميكانيك الكمي
The New Theory of Quantum Mechanics

في سنة 1909، بعد عرض الظاهرة الكهروضوئية، أستخدم اينشتاين فرضيته الخاصة بالفوتون للحصول على اشتقاق بسيط لتوزيع الجسم الأسود لبلانك. لم يستطع بلانك نفسه أن يذهب أبعد مما ذهب إليه اينشتاين، لقد أفترض أن نقل الطاقة بين المادة (المذبذبات في جدران الفجوة) و الأشعة كانت مكممة (أي أن الطاقة تنتقل من و إلى المذبذب بحبيبات أقل من حاصل ضرب h في تردد المذبذب). لكن بلانك أفترض أن الطاقة في مجال كهرومغناطيسي (في الفجوة) كانت موزعة بشكل مستمر، كما هو الحال في النظرية الكلاسيكية. بالمقارنة، كانت فرضية اينشتاين تنص على أن الطاقة في المجال نفسه مكممة، أي لأغراض معينة، يتصرف المجال كغاز مثالي، ليس كمجموعة جزيئات إنما فوتونات. كل فوتون بطاقة h مضروبة بالتردد، بحيث أن الشدة تتناسب و عدد الفوتونات. المفتاح لهذا الاعتقاد كان ملاحظة اينشتاين بأن توزيع بلانك عند التردد العالي لأشعة الجسم الأسود (الموصوف بقانون واين Wien's law)يمكن أن يشتق بفرض غاز فوتوني و تطبيق الميكانيكا الإحصائية عليه. كان هذا بالمقارنة مع الجزء عند التردد المنخفض (الموصوف بواسطة قانون رايلي – جينز Rayleigh-Jeans law) الذي يمكن الحصول عليه بنجاح باستخدام النظرية الكهرومغناطيسية الكلاسيكية، أي بافتراض أن لدينا موجات. و عليه فإن لدينا جسيمات و موجات يلعب كل منهما دوره. إضافة إلى ذلك، فقد نظر اينشتاين لتقلبات الطاقة حول قيمة معدلها، و لاحظ أن الصيغ المستحصلة لها صورتين، واحدة تحصل عليها إذا كان الضوء مكونا من موجات و الأخرى إذا كان مكونا من جسيمات. و عليه فلدينا ثنائية الموجة –الجسيم wave-particle duality. في سنة 1924 وسع دي برولي Louis de Broglie 1992 -1987 ثنائية الجسيم للضوء لتشمل كل المادة. لقد صاغ دي برولي النص التالي: أن حركة جسيم مهما كان نوعها تكون مرفقة بانتشار موجة. هذه هي فكرة موجة القبطان التي تقود حركة جسيم حر. بعد ذلك اقترح دي برولي توسيع فكرة موجات الإلكترون للجسيمات المقيدة في الذرات، نعني أن الإلكترونات التي تتحرك حول النواة تقاد بموجات قبطان. و عليه، ثنائية مرة أخرى، موجات دي برولي و جسيمات بور. استطاع دي

برولي أن يبين أن أنصاف أقطار بور يمكن الحصول عليها بوضع عددا صحيحا من الموجات حول النواة. وهذا أعطى تفسير للشرط الكمي للزخم الزاوي لبور (انظر أعلاه).

طورت نظرية الكم الجديدة بين حزيران 1925و حزيران 1926 . استطاع Werner Heisenberg1901 – 1967 (الشكل 2-15)، تطوير شفرة تربط الأعداد الكمية بالأطياف و ذلك باستخدام نموذجا ذريا بسيطا و مختلفا كليا (لا يستخدم المدارات). كذلك فقد اكتشف أن الميكانيك الكمي لا يتبع القانون التبادلي للضرب commutative law of multiplication أي أن $pq \neq qp$. عندما رأى ماكس بورن 1882 –1970 (الشكل2-16) هذا اقترح أن هايزنبيرك يستخدم المصفوفات و أصبح هذا ميكانيك المصفوفة، بالنهاية كل الخطوط الطيفية و الأعداد الكمية تم استنتاجها للهيدروجين. وبهذا تكون أول نسخة كاملة من الميكانيك الكمي قد ولدت. حري بنا أن نلاحظ هنا أنه لم يكن ذلك ناتج عن ملاحظة أو تجريب تم استخدامه للحصول على النظرية إنما كان رياضيات بحتة. سنلاحظ لاحقا أن المصفوفات ستستثمر في الحوسبة الكمية .



الشكل(2-15): شرودنجر و هايزنبيرك

بنفس الفترة تقريبا استطاع أرون شرودنجر Erwin Schrodinger 1887-1961 (الشكل 2-15) أن يشيد على عمل دي برولي على الموجات المادية. لقد طور معادلة موجة(التي تمثل ψحلا لها) لالكترونات القلب المقيدة. كما في ذرة الهيدروجين. لقد نتج عن ذلك أن النتائج المشتقة من هذه المعادلة تتفق مع نموذج بور. ثم بين أن ميكانيك المصفوفة لهايزنبيرك وميكانيكيه الموجي متكافئتان.

الشكل(2-16): نموذج بورن

لقد افترض ماكس بورن Max Born بأن ψ، التي هي حل لمعادلة شرودنجر يمكن أن تفسر كسعة احتمال، مقدار فيزيائي غير حقيقي. أن سعة الاحتمالية هي دالة لموضع الإلكترون (x,y,z) وعندما تربع تعطي الاحتمالية إيجاد الإلكترون في وحدة الحجم عند النقطة (x,y,z). لقد أعطانا هذا نموذجا ذريا احتماليا جديدا بحيث يكون هناك احتمال كبير أن يكون الإلكترون موجودا في غلاف مداري معين. تمثيل للحالة الأرضية للهيدروجين موضح في الشكل(2-16) حيث عند الأماكن التي تكون فيها كثافة النقط عالية هناك احتمالية كبيرة أن نجد الجسيم. الطبيعة الخطية لمعادلة الموجة تعني أنه إذا كان ψ_1 وψ_2 حلان فإن $\psi_1 + \psi_2$ وهي حالة تراكب تمثل حلا أيضا (سوف نلقي نظرة على التراكب حالا). التأويل الاحتمالي هذا للميكانيك الكمي يقتضي بأن يكون النظام في كلا الحالتين حتى يتم القياس.



الشكل(2-17): ديراك وبورن

لم يكن شرودنجر سعيدا مع التأويل الاحتمالي (التراكب) فطرح أفكارا هدف من خلالها إلى إظهاره غير صحيحا. وهذا يسمى"قطة شرودنجر Schrödinger cat"، وهي أحجية تبين حالة قطة تكون في كلا الحالتين ميتة ψ_1 وحية ψ_2 إلى أن تتم رؤيتها.

طور باول ديراك Paul Dirac 1902-1984 (الشكل 2-17) طريقة جديدة وأدخل رموز جديدة **bra-ket** نستخدمها اليوم للحوسبة الكمية. لقد وسعت طريقته لنظرية المجال المكمم، ووسع معادلة شرونجر، البرم المدمج، و نسبية انشتاين وضديد المادة المتنبأ بها.

في سنة 1927 أنجز هايزنبيرك اكتشافه الرئيسي الثاني، **مبدأ الريبة لهايزنبيرك Heisenberg uncertainty principle** التي تربط موضع وزخم الجسيم. ينص هذا المبدأ على أنه كلما أصبحت دقتك أكبر لموضع الجسيم، إنما يكون ذلك على حساب دقة

معرفتك بزخمه والعكس صحيح. إن الريبة هي بسبب التأثير غير المسيطر على الجسيم في أي محاولة لملاحظته. وهذه كانت إشارة إلى إنهاء **الحتمية determinism**.

لنعد الآن لنيلز بور. في سنة 1927 وصف بور مفهوم **المتممية complementary**. الذي يعتمد على نوع عمليات القياس التي تستخدمها للنظر للنظام فيما إذا كان يتصرف كموجة أو جسيم. لقد وضع في بوتقة واحدة مفاهيم مختلفة من عمل هايزنبيرك وشرودنجر وبورن وأستنتج أن صفات نظام ما (مثل الموضع والزخم) هي غير معرفة ولها فقط قيم جهد باحتمالات معينة لقياسها. لقد سمي **هذا تفسير كوبنهاكن Copenhagen interpretation للميكانيك الكمي**.

لم يحب أنشتاني تفسير كوبنهاكن، ولفترة ليست بالقصيرة، حاول أينشتاين أن يدحضه بواسطة تجارب فكرية، لكن بور كان دائما لديه الجواب. في سنة 1935 توصل أينشتاين إلى مخرج كان أخيرا تضمينا عميقا للحوسبة الكمية وقادت لظاهرة تسمى **التشابك entanglement**، المفهوم الذي سنلقي عليه نظرة في عدة صفحات.

7-2 مبادئ مهمة للحوسبة الكمية

Important Principle for Quantum Computing

إن الأجزاء الرئيسية للميكانيك الكمي للحوسبة الكمية هي:

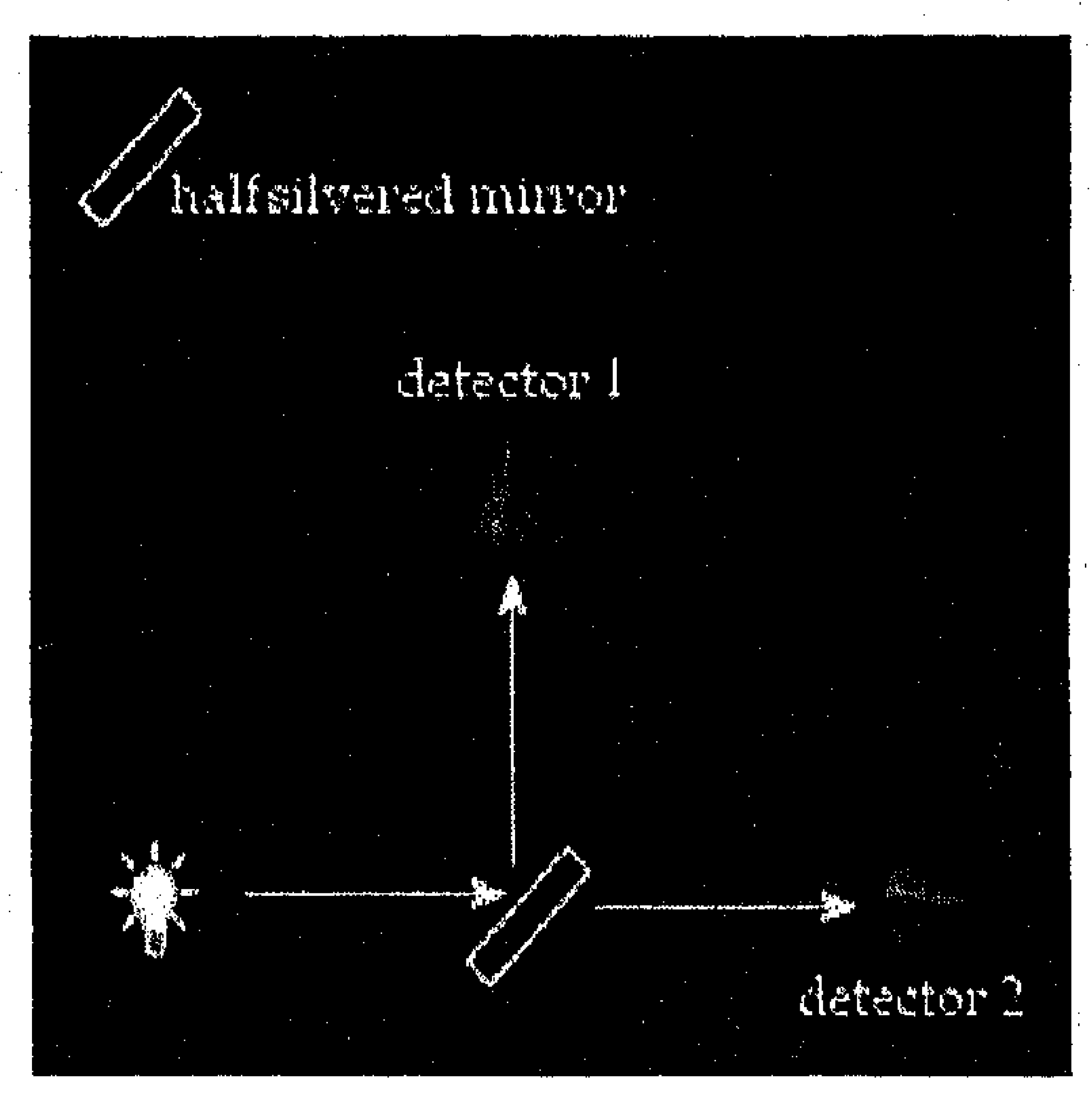
- **الجبر الخطي Linear algebra**
- **التراكب Superposition**
- **رموز ديراك Dirac notation**
- **التمثيل ألمعلوماتي Representing information**
- **الريبة Uncertainty**
- **التشابك Entanglement**
- **الفرضيات الأربع للميكانيك الكمي The four postulates of quantum mechanics**

2-7-1 الجبر الخطي Linear Algebra

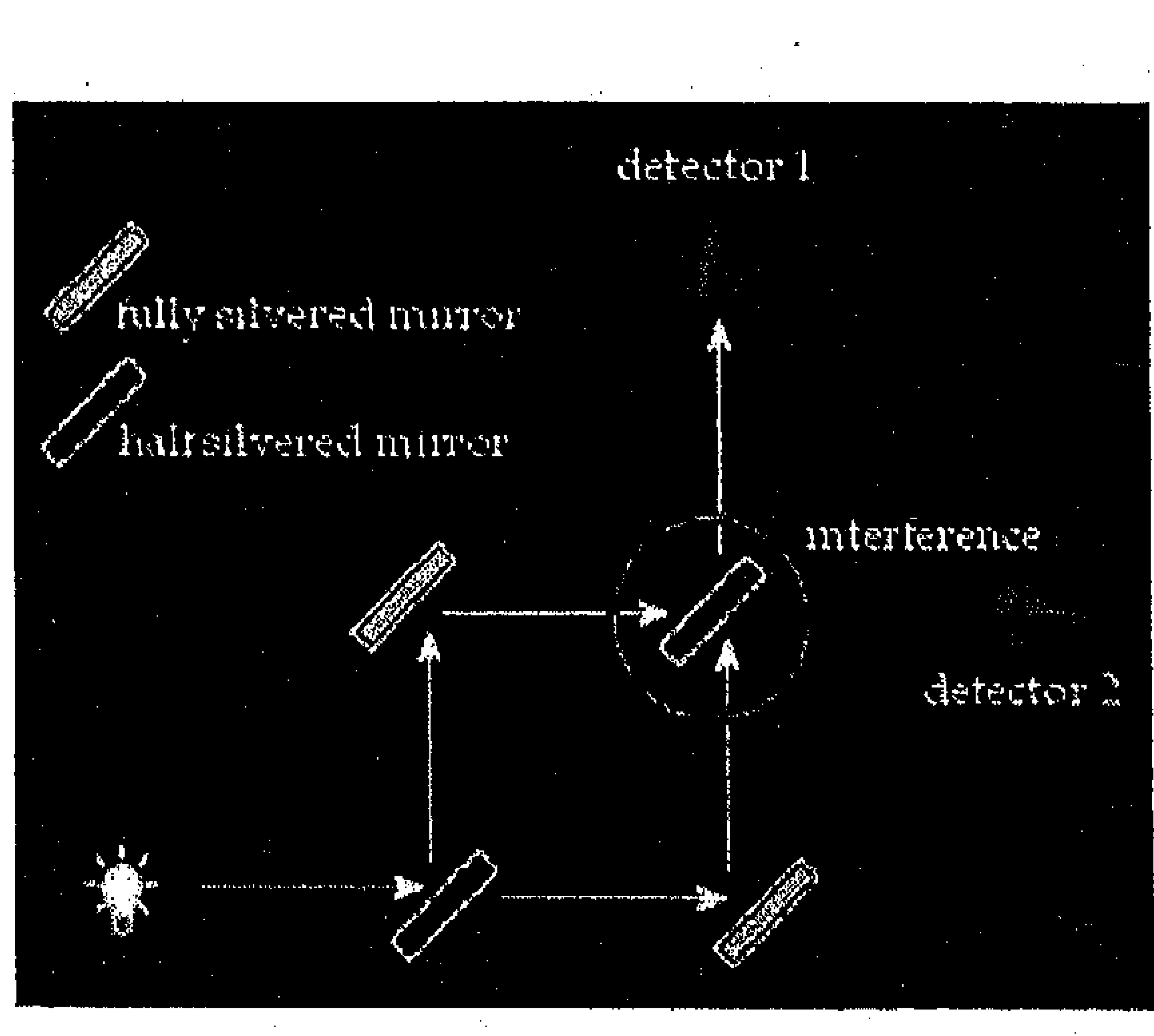
إن الميكانيك الكمي يتكل بشكل كبير على الجبر الخطي. بعض مفاهيم الميكانيك الكمي تأتي من الصياغة الرياضية، وليس من التجارب الفكرية. وهذا من شأنه أن ينشأ استنتاجات مضادة للحدس.

2-7-2 التراكبSuperposition

التراكب يعني أن نظاما ما يمكن أن يكون في حالتين أو أكثر آنيا. على سبيل المثال يمكن لجسيم مفرد أن يسير على طول مسارين مختلفين في نفس الوقت. وهذا يدل على أن الجسيم له مميزات موجية، الذي يعني أن الموجات من مختلف المسارات يمكن أن تتداخل مع بعضها البعض. التداخل يجعل الجسيم يتصرف بطرق من المستحيل شرحها بدون هذه المميزات الموجية.



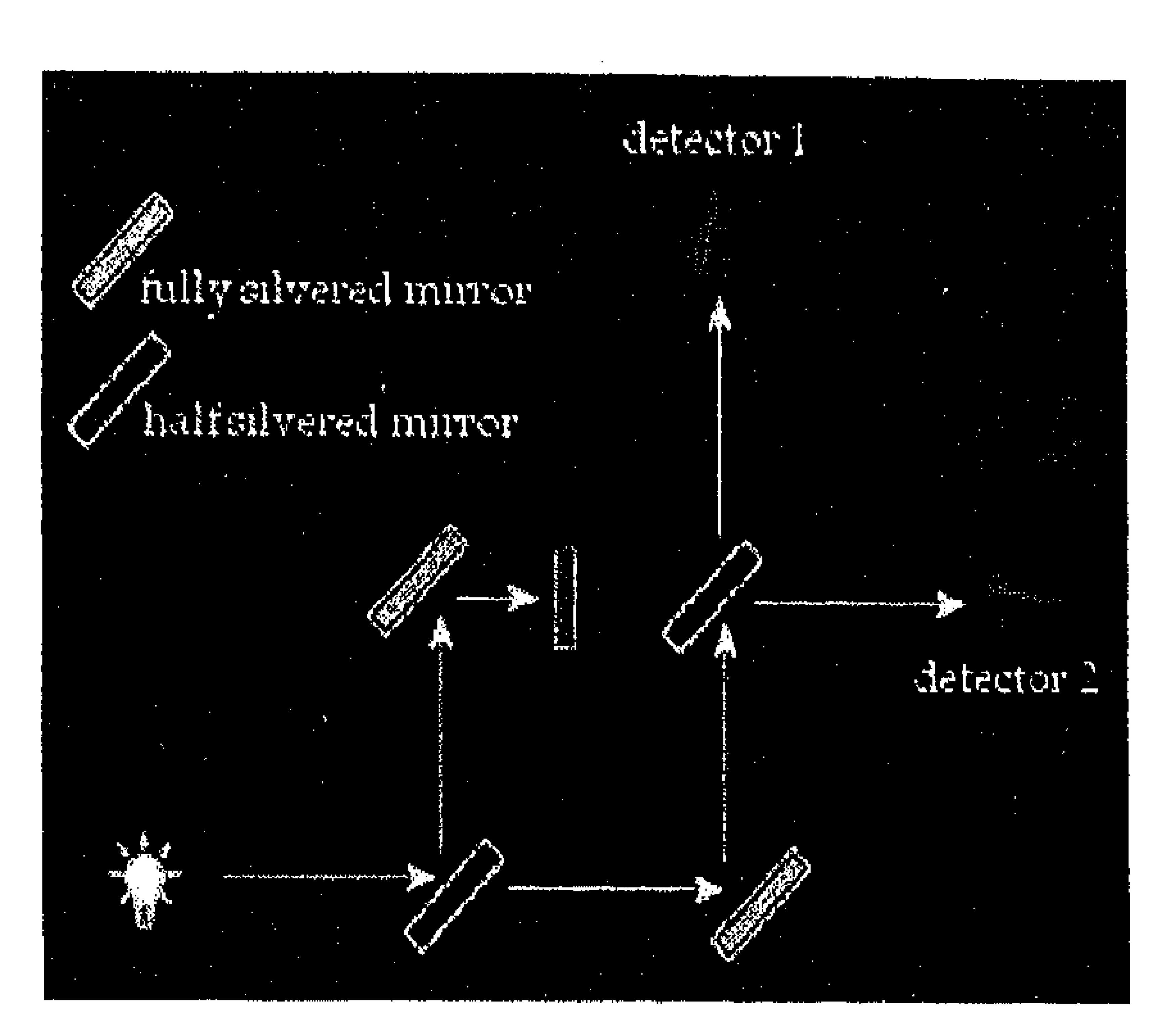
الشكل(2-18):الريبة



الشكل(2-19): التراكب

إن قابلية الجسيم لأن يكون في حالة تراكب هو الوضع الذي نحصل منه على الطبيعة الموازية للحوسبة الكمية. إذا كانت كل حالة من الحالات تطابق مقدار مختلف عندئذ، إذا كان لدينا تراكب من مثل هذه الحالات وأثرنا على النظام، فإننا فعليا نؤثر على كل الحالات بشكل آني.

يمكن شرح التراكب بواسطة مثال بسيط باستخدام مرايا مفضضة ونصف مفضضة. تعكس المرآة النصف مفضضة نصف الضوء وتنفذ النصف الآخر(الشكل 2-18). إذا أرسلنا فوتون مفرد خلال هذا النظام فإن ذلك يعطينا فرصة 50% للضوء أن يسقط على الكاشف 1 وفرصة 50% لأن يسقط على الكاشف 2. يا ترى أي المسارين سيسلك الضوء؟ بالحقيقة إنه سيتخذ كلاهما سبيلا! فالعملية إذن هي فقط أن الكاشف الفوتوني الذي يقيس الفوتون أولا هو الذي يكسر التراكب، وعليه فالكواشف هي التي تسبب العشوائية، ليس المرآة النصف مفضضة. ويمكن لهذا أن يتضح بإضافة بعض المرايا المفضضة كليا والسماح لجزئي الفوتون المتراكب (اللذان في هذه النقطة في مكانين في نفس الوقت) بالحركة ذهابا وإيابا بحيث يلتقيا ويتداخلا مع بعضهما البعض عند نقطة التقاءهما.



الشكل(2-20): التراكب 2

إذا وضعت مرآة نصف مفضضة أخرى (الشكل2-19) عند نقطة الالتقاء هذه وإذا كان الضوء هو فقط جسيمات فإننا نتوقع أن الضوء سيتصرف كالسابق (يسلك أحد الطريقين باحتمال 50%) لكن التداخل (مثل تداخل الموجة عندما يرمى حجرين في بركة بالقرب من بعضها بنفس الوقت) يسبب كشف الفوتون دائما بالكاشف 1. مثال ثالث (انظر للشكل 2-20) يبين بوضوح أن الفوتونات تسير في كلا المسارين لأن قطع أحد المسارين سوف يكسر التراكيب و يوقف التداخل .

2-7-3 رمز ديراك Dirac Notation

كما وصف في الفصل السابق فرمز ديراك يستخدم للحوسبة الكمية. يمكننا تمثيل الحالات لنظام كمي بدلالة **kets**. على سبيل المثال برم إلكترون يمكن أن يمثل $|0\rangle = spin\ up$ و $|1\rangle = spin\ down$.

يمكن التفكير بأن الإلكترون عبارة عن مغناطيس صغير، كما يحدث لجسيم مشحون يبرم حول نفسه. عندما نمرر إلكترون يسير أفقيا خلال مجال مغناطيسي غير متجانس، ولنفرض باتجاه رأسي، فإن الإلكترون إما أن يذهب إلى الأعلى أو إلى الأسفل. إذا كررنا التجربة مع إلكترون ذو برم علوي فإنه يذهب إلى الأعلى وإن كررناها مع إلكترون ذو برم سفلي فإنه يذهب إلى الأسفل. نقول بأن الإلكترون للأعلى بعد القياس الأول هو في حالة $|0\rangle$ و الإلكترون للأسفل هو في حالة $|1\rangle$. لكن، إذا أخذنا الإلكترون للأعلى و مررناه خلال مجال أفقي فإنه يخرج من جهة معينة50 % من الزمن و من الجهة الأخرى 50% من الزمن. إذا مثلنا هاتين الحالتين بالتمثيل $|+\rangle$ و $|-\rangle$ فيمكننا القول أن الإلكترون ذو البرم إلى الأعلى كان في حالة تراكب من حالتين $|+\rangle$ و $|-\rangle$ حيث:

$$| \rangle \quad \frac{}{\sqrt{2}} | \rangle \quad \frac{}{\sqrt{2}} | \rangle$$

بحيث، عندما نجري القياس والمجال الأفقي فإننا نسقط الإلكترون على حالة أو أخرى باحتماليات متساوية $\frac{1}{2}$ (معطاة بتربيع السعات).

2-7-4 تمثيل المعلومات Representing Information

معلومات الميكانيك الكمي يمكن إدراكها فيزيائيا بعدة طرق. فلكي يكون لدينا شيئا مشابها للبت bit الكلاسيكية نحتاج نظام ميكانيكي كمي ذو حالتين فقط، عندما يقاس. لقد لاحظنا توا مثالين، برم إلكترون و اتجاه فوتون. هناك طريقتان لتمثيل معلومات ثنائية بطريقة قادرة على إبراز التأثيرات الكمية (مثل التشابكentanglement و التراكب superposition) هما **استقطاب الفوتونات polarization و البرم النووي nuclear spin**. سنتفحص التضمينات الفيزيائية المختلفة لهذه البتات الكمية quantum bits تختصر إلى كيوبتات qubits في فصل 7.

2-7-5 الريبة Uncertainty

العالم الكمي هو صغير لا مختزل و عليه فمن المستحيل قياس نظام كمي دون أن يكون لدينا تأثير على ذلك النظام لأن جهاز قياسنا سيكون ذو صفات ميكانيكية كمية. لذلك فليس هناك طريقة للتنبؤ بدقة بكل مميزات جسيم ما. هناك نوع من الموازنة فالخواص تحدث بأزواج متممة (مثل الموضع و الزخم، أو البرم الرأسي و الأفقي) و إذا علمنا خاصية معينة بدقة عالية فإن علينا أن لا نعرف شيئا تقريبا عن الخاصية الثانية. تصرف الخاصية غير المعروفة هي عشوائية في الأساس. كمثال على هذا موضع جسيم و سرعته. إذا عرفنا تماما أين يكون الجسيم فإننا لا نعرف شيئا عن سرعته هذا الغموض يستغل في الكربتوغرافي (أنظر فصل 6).

لقد تم افتراض أن الجسيمات في الحقيقة ليس لها مقادير معرفة للخواص غير المعروفة حتى يتم قياسها. و هذا يشبه تماما قولنا بأن شيء ما غير موجود حتى نراه.

2-7-6 التشابك entanglement

في سنة 1935 عرض كل من اينشتاين و زملائه Podoliski and Rosen أحجية (سُميت EPR بعدهم) في محاولة منهم لدحض الطبيعة الغير معرفة للأنظمة الكمية. نتائج تجربتهم تبدو وكأنها تبين أن أنظمة الكم معرفة، لها حالة محلية local state قبل القياس. و رغم أن الفرض الأساسي تم إثبات خطأه لاحقا(أي أنه تم برهنة أن الأنظمة الميكانيكية ليس لها حالات محلية قبل القياس). لكن التأثير الذي عرضوه كان لا يزال مهما، و أصبح لاحقا يعرف بالتشابكentanglement.

التشابك هي قابلية زوج من الجسيمات على التفاعل عبر أي مسافة بشكل آني. الجسيمات لا تتواصل بالضبط، لكن هناك ارتباط إحصائي بين نتائج القياسات على كل جسيم من الصعب أن يفهم باستخدام الفيزياء الكلاسيكية و لكي يصبح جسيمين في حالة تشابك يسمح لهما بالتفاعل ثم يفصلا و بقياس سرعة أحدهما (بغض النظر عن المسافة بينهما)، يمكننا التأكد من مقدار سرعة الجسيم الأخر (قبل قياسها). السبب الذي نقول أنهما يتواصلان أنيا هو أنهما لا يخزنان حالة محلية و لهما حالة معرفة جيدا حالما يقاسان. بسبب هذا التحديد لا يمكن استخدام الجسيمات لبث رسائل كلاسيكية أسرع من سرعة الضوء لأننا نعرف فقط

الحالات عند قياسها. للتشابك تطبيقات مختلفة وواسعة في الخوارزميات والمكننــة الكميــة. سنلقي نظرة على البعض منها لاحقا.

كما قلنا سابقا، لقد تم برهنة أن الجسيمات المتشابكة ليس لها حالة محلية و هذا موصوف في البند 7.6.

2-7-7 فرضيات الميكانيك الكمي الأربعة

The Four Postulates of Quantum Mechanics

لنظرية ميكانيك الكم أربع فرضيات رئيسية. سنعرضها هنا كجمل بسيطة. لكننا ســنعود لتفصيلها في الفصل الخامس لاحقا بدلالة مصطلحات الحوسبة الكمية.

1) لنظام كمي مغلق نحن بحاجة لوصف حالة جميع الجسيمات المحتواة داخــل ذلــك لنظام. الفرضية الأولى تعطينا طريقة لفعل ذلك باستخدام متجه حالة مفردة لتمثيــل النظــام ككل. لنقول بأن الحالة يجب $\mathbb{C}^n$ أن تكـــــون $\mathbb{C}^2$ متجه في ، وهذا سيكون لنظــام البرم.

2) إن تطور نظام مغلق هو تحول أحادي Unitary transform. أي أنه بينما يتطور النظام تحت قدرته الذاتية-ليس هناك قياسات-فإن الحالة عند مرحلة معينة $|\Psi'\rangle$ ترتبط مــع الحالة في مرحلة معينة سابقة (أو زمن) $|\Psi\rangle$ بالتحويلِ ألأحادي $|\Psi'\rangle=U|\Psi\rangle$. وهذا يعني بأننا نستطيع وصف تصرف نظام بشكل كامل باستخدام المصفوفات الأحادية.

3) الفرضية الثالثة تتعلق بعمل قياسات على نظام كمي مغلق، والتأثير الذي تمتلكه هذه القياسات على ذلك النظام.

4) الفرضية الرابعة تتعلق بربط أو عزل أنظمة كمية مغلقة مختلفة باســتخدام ضــرب tensor products*.

الفصـــل الثـــالث

رياضـــيات للحوسبـــــة الكميـــــة

Mathematics for Quantum Computing

3-1 مقدمة Introduction

في الحاسبات المألوفة لدينا المؤثرات المنطقيـــة logical operators (البوابـــات gates) مثل بوابة النفي NOT و التي تقوم بإجراء العمليات على الأرقام الثنائيـــة bits. المقابـــل الكمي لهذه المؤثرات هي مؤثرات المصفوفات و التي تؤثر على متجه الحالة الثنائي الكمي qubit state vector. الرياضيات التي نحتاجها للتعامل معها تشمل:

- المتجهات لتمثيل الحالة الكمية.
- المصفوفات لتمثيل البوابات المؤثرة على القيم.
- الأعداد المركبة Complex numbers، لأن مركّبات متجه الحالة الكمية بشكل عام هي أعداد مركبة.
- الاقترانات المثلثية Trig functions للتمثيل القطبي للأعداد المركبة و متسلـــسلة فوريير Fourier series.
- المُسقطات Projectors للتعامل مع القياسات الكمية.
- نظرية الاحتمالات Probability theory لحساب احتمالية النواتج المقاسة.

إضافة إلى وجود مادة هنا ربما ليست مألوفة لديك (على سبيل المثال: فـــضاءات المتجـــه المركب complex vector spaces فهي إذن فرصة لتعرف على الأقل بعض المعالجـــات الرياضية. البنود المتعلقة بالمواضيع التي تعرفها مثل متعددة الحدود polynomials المثلثات trigonometry واللوغاريتمات logs ستكون مفيدة لك كمراجعة.

ما الذي لا يوجـــد هنـــا؟ هنـــاك بعـــض الرياضـــيات الأساســـية غيـــر مغطـــاة مثـــل: الكسور fractions، النسب المئوية percentages، الجبر الأساسي basic algebra، القوى

powers، الجذور radicals، المجاميع summations، النهايـــات limits، التحليـــل إلـــى العوامل factorization، الهندسة البسيطة simple geometry. إذا كنت غير متقنا لهـــذه المواضيع يجب عليك دراستها قبل مواصلة هذا الفصل.

2-3 الرموز المنطقية Logical Symbols

هناك عدد من الرموز المنطقية المستعملة في هذا النص لتقليص حجم الصيغ، نشرحها أدناه

$\forall$تعني لكل for all.

مثال:

$\forall\ n > 5; f(n) = 4$, و تعني: لكل قيم n اكبر من 5 ستعود قيمة $f(n)$ لمقدار 4.

$\exists$ تعني: يوجد there exists.

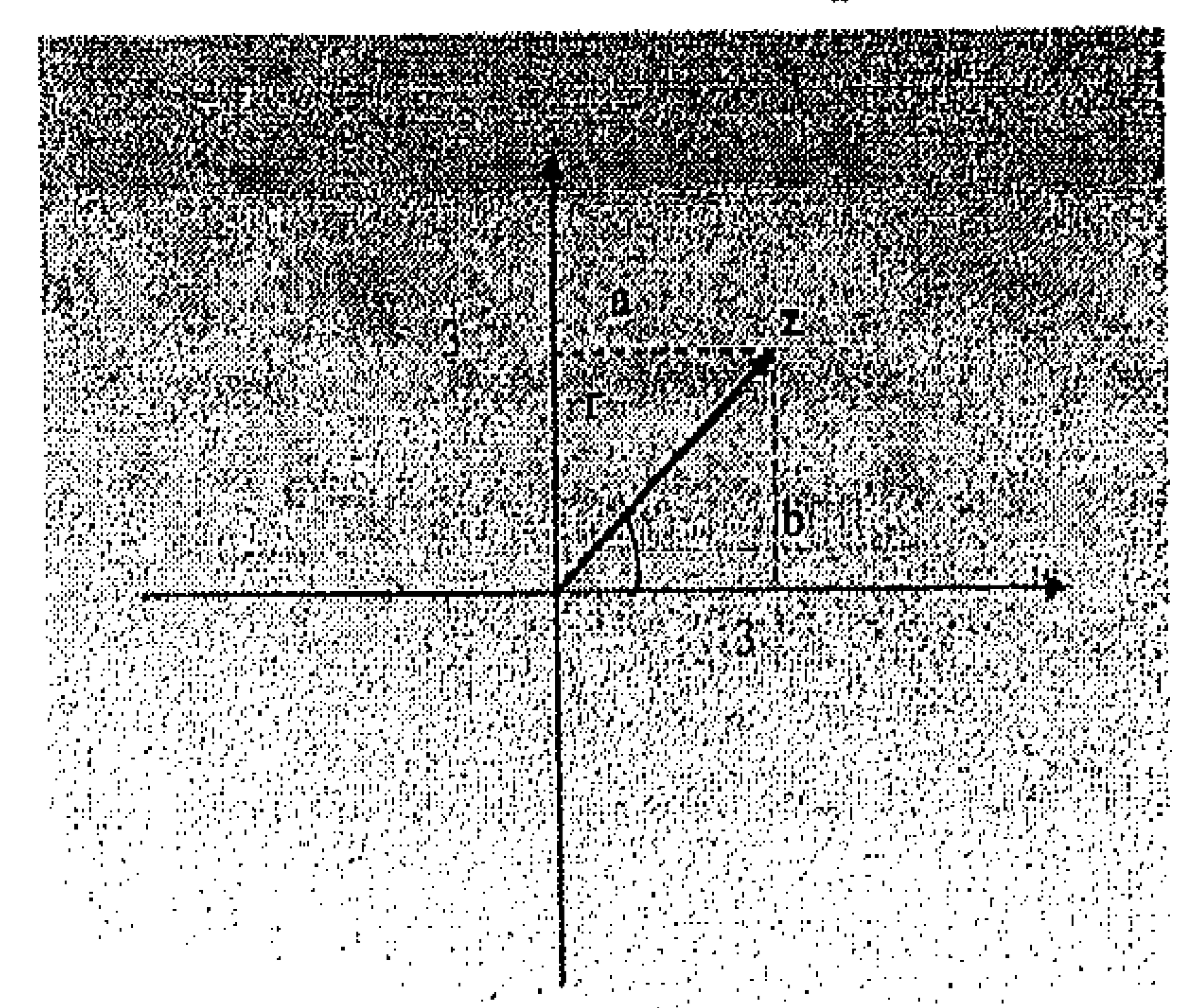
مثال: $\exists\ n$ بحيث $f(n) = 4$, و تعني: يوجد قيمة للعدد n و التي تجعل $f(n)$ مساويا 4.

إذا كان $f(n) = (n-1)^2 + 4$ عندها تكون قيمـــة n تساوي 1

iff تعني: إذا و فقط إذا.

مثال:

$n = 8 \text{ iff } f(n) = 4$: و تعني: $f(n)$ تـــساوي 4 إذا كانت n تساوي 8 فقط و ليس لأي قيمة أخـــرى للعدد n



الشكل(3-1): تمثيل $z = a + ib$

3-3 الأعداد المركبة Complex Numbers

يوصف العدد المركب بالتعبير الرياضي التالي

$$z = a + ib \qquad (3.1)$$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$ (وهي الأعداد الحقيقية) حيث i هي $\sqrt{-1}$. نقول أن z تنتمي إلـــى $\mathbb{C}$ (الأعداد المركبة). z تسمى: عددًا مركباً لأنها مركبة من جزأين a و b . في بعض الأحيـــان تكتب z على شكل (a,b).

باستثناء القواعد الخاصة ب i، فإن عمليات الجمع والطرح والضرب تتبع القواعد الاعتيادية في الحساب. تتطلب القسمة استخدام الأعداد المركبة المرافقة complex conjugate التـــي سنتعرف عليها في البند التالي. سنوضح هذه العمليات بمثال تجده في الصندوق أدناه.
إن نظام الأعداد المركبة مغلق، عدا القسمة على صفر، فنتائج الجمع ونسب الأعداد المركبة تعطينا أعدادا مركبة أي أننا نبقى في داخل النظام. لاحظ المثال التالي:

$$i^{-3} = i,\ i^{-2} = -1,\ i^{-1} = -i,\ i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1$$

وعليه فالنموذج $(-i,1,i,-1)$ يعيد نفسه للمالانهاية.

مثال(3-1): أساسيات الأعداد المركبة:

الجمع

$$(5 + 2i) + (-4 + 7i) = 1 + 9i$$

الضرب:

$$\begin{aligned}(5 + 2i)(-4 + 3i) &= 5(-4) + 5(3)i + 2(-4)i + (2)(3)i^2 \\ &= -20 + 15i - 8i - 6 \\ &= -26 + 7i\end{aligned}$$

إيجاد الجذور:

$$\begin{aligned}(-5i)^2 &= 5i^2 \\ &= 5^2\, i^2 \\ &= 25(-1) \\ &= -25\end{aligned}$$

العدد 25- له جذران $5i$ و $-5i$.

3-3-1 الإحداثيات القطبية Polar Coordinates و مرافقات الأعداد المركبةComplex Conjugates

يمكننا تمثيل الأعداد المركبة تمثيلا قطبيا بدلالة (r,θ) حيث

$$(r,\theta) = (|z|,\theta) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (3.2)$$

حيث: $\theta, r \in \mathbb{R}$ ، $|z|$ يسمى: المعيار (the norm) و أيضا المعامـــل (the modulus) للعدد z حيث

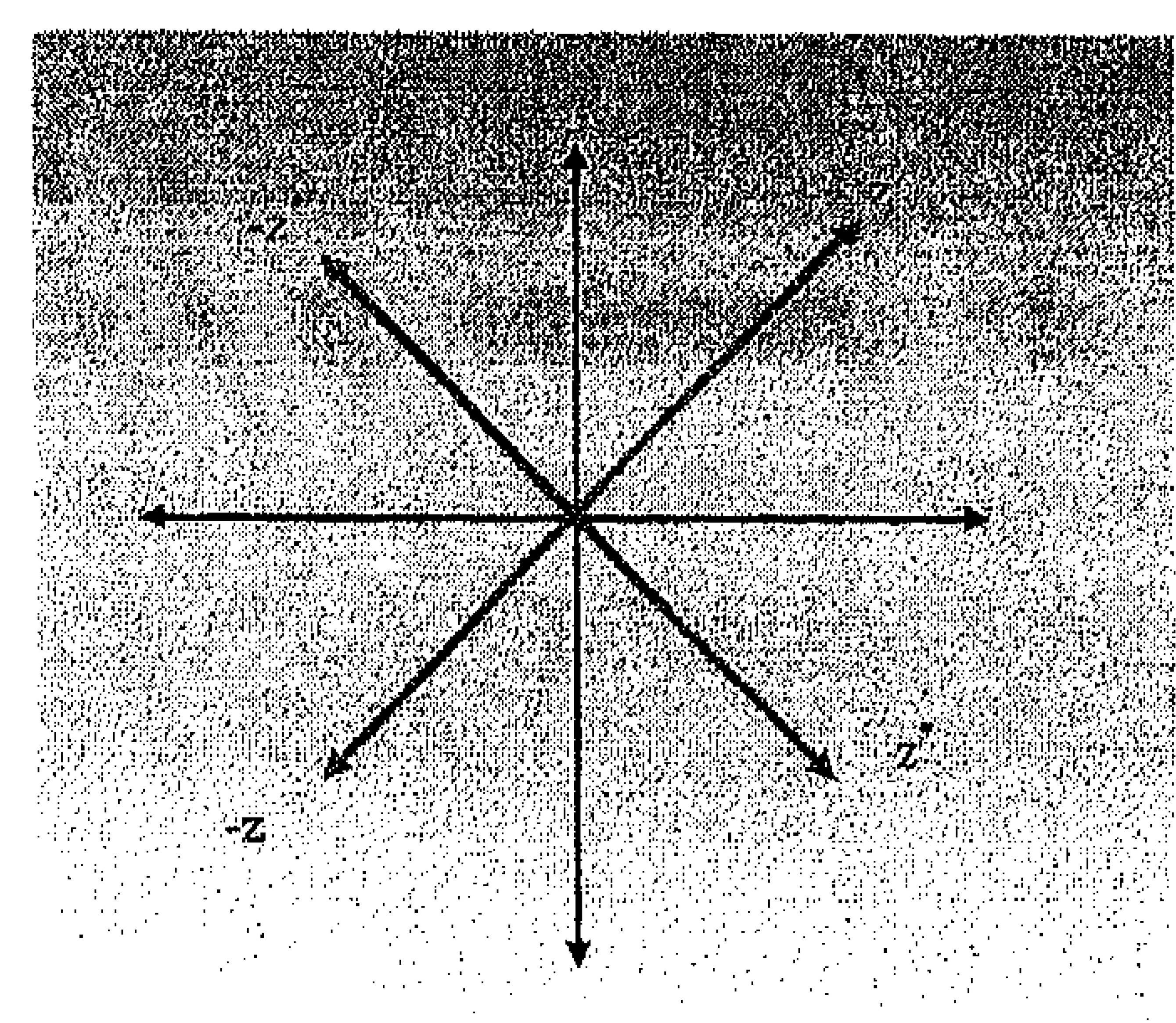
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.3)$$

أو

$$|z| = \sqrt{z^* z} \quad (3.4)$$

حيث z^* هو المرافق للعدد المركب z

$$z^* = a - ib \quad (3.5)$$



الشكل(3-2): z ، z^* ، $-z^*$ ، $-z$

للإحداثيات القطبية الموضحة في الشكل(3-1) يمكننا القول أن θ هي الزاوية المحصورة بين الخط المرسوم بين نقطة الأصل و النقطة (a,b) بطول r في المستوى المركب complex plane و محور السينات، و الإحداثيات التي أخذت للعدد المركب هي x = a و y = b . المحور الأفقي يسمى المحور الحقيقي (real axis) و المحور العمودي يسمى المحور التخيلي imaginary axis. و من المفيد أيضا الإطلاع على العلاقات بين z ، z^*، $-z^*$، $-z$ و التي تم تمثيلها بيانيا في الشكل(3-2). لذا للتحويل من الإحداثيات القطبية polar coordinates إلى الإحداثيات الديكارتية Cartesian coordinates يكون لدينا

$$(r,\theta) = a + bi \quad (3.6)$$

حيث: $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$

و بالعكس؛ فالتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية ممكن لكنه أصعب قليلا

$$+bi = (r,\theta) \quad (3.7)$$

حيث:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \text{أو} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

مثال(3-2):

$$a = r\cos\theta = 3\cos 40^\circ$$

$$= 3(0.77)$$
$$= 2.3$$

$$b = r\sin\theta = 3\cos 40^{\circ}$$
$$= 3(0.64)$$
$$= 1.9$$

$$z = 2.3 + 1.9i\,.$$

مثال(3-3):

حول$2i + 1-$ إلى $(r,\ \theta)$

هذا يعطينا: a =-1 و b = 2

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{5}$$
$$= 2.2$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$= \frac{2}{-1}$$
$$= -2$$

و بما أن $a < 0$ و $b > 0$ فان θ تقع في الربع الثاني، أي أن: $\theta = 116.6^{\circ}$ و الحل هو:

$$-1 + 2i = (2.2, 116.6^{\circ})$$

2-3-3 الإنطاق Rationalising و القسمة Dividing

$\frac{1}{a+bi}$ يُنطق بضرب كل من البسط و المقام بالعدد المركب $a - bi$

مثال(3-4):الإنطاق

$$\frac{1}{5+2i}=\frac{1}{5+2i}\frac{(5-2i)}{(5-2i)}$$
$$=\frac{5}{29}-\frac{2}{29}i$$

قسمة العدد المركب تكون بإنطاق المقام.

مثال(3-5): قسمة عدد مركب

$$\frac{3+2i}{2i}=\frac{3+2i}{2i}\frac{(-2i)}{(-2i)}$$
$$=\frac{-6i-4i^2}{-4i^2}$$
$$=\frac{-6i+4}{4}$$
$$=1-\frac{3}{2}i$$

3-3-3 الصيغة الأسية Exponential Form

يمكن للأعداد المركبة أن تمثل بالصيغة الأسية:

$$z=re^{i\theta} \tag{3.8}$$

وهذه المعادلة مشتقة من:

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=re^{i\theta}$$

حيث:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{3.9}$$
$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \tag{3.10}$$

ويمكن كتابتهما كما يلي:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{3.11}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{3.12}$$

لإثبات العلاقة (3.9) نستخدم متسلسلة القوة للصيغة الأسية power series exponent (وهى اقتران متعدد الحدود لانهائي infinite polynomial):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + ...$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ... + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + ...\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

مثال(3-6): حول $3+3i$ إلى الصيغة الأسية.

الحل يتطلب خطوتين رئيستين:

.1

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{18}$$

2

في الربع الأول، أي تطبيق arctan :

$$\tan^{-1}\frac{3}{2} = \frac{\pi}{4}$$

عندئذٍ تكون الصيغة الأسية للعدد المركب z مساوية للتالي:

$$\sqrt{18}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$$

مثال(3-7):

حول $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ إلى الصيغة a + bi (وتسمى أيضا الصيغة المستطيلة rectangular form).

$$\begin{aligned} e^{\frac{3\pi i}{4}} &= e^{i(\frac{3\pi}{4})} \\ &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \\ &= \cos(135^\circ) + i\sin(135^\circ) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

خصائص:

$$z^* = re^{-i\theta} \qquad (3.13)$$

$$e^{-i2\pi} = 1 \qquad (3.14)$$

3-4 المصفوفات Matrices

نحتاج المصفوفات في الحاسب الكمي لتمثيل البوابات gates و المؤثرات operators و المتجهات vectors. وحتى لو كنا على معرفة بهذه المادة، فمن المفيد مراجعتها لأنها ستستخدم بشكل متكرر.

المصفوفة هي مجموعة أعداد مرتبة. أعداد المصفوفة تسمى المدخلات entries. مثلا:

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 \\ 23 & 5 & 7 & 14 \\ 4 & 6 & 13 & 20 \end{bmatrix}$$

من أساسيات حساب المصفوفات ما يلي:

- لدينا المصفوفات M و N و O و الكميات القياسية α و β :
- قانون العملية التبديلية للجمع $M+N=N+M$
- قانون العملية الترافقية للجمع $M+(N+O)=(M+N)+O$
- قانون العملية الترافقية للضرب $M(NO)=(MN)O$
- قانون العملية التوزيعية $M(N+O)=MN+MO$
- قانون العملية التوزيعية $(N+O)M=NM+OM$

إضافة إلى ما يلي:

- $M(N-O)=MN-MO$
- $(N-O)M=NM-OM$
- $\alpha(N+O)=\alpha N+\alpha O$
- $\alpha(N-O)=\alpha N-\alpha O$
- $(\alpha+\beta)O=\alpha O+\beta O$
- $(\alpha-\beta)O=\alpha O-\beta O$
- $(\alpha\beta)O=\alpha(\beta O)$
- $\alpha(NO)=(\alpha N)O=N(\alpha O)$

لا بد انك لاحظت أنه ليس هناك قانوناً للعملية التبديلية للضرب؛ إذ ليس دائماً يكون $MN=NM$.

وهذا مهم في ميكانيكا الكم التي تتبع قانون العملية غير التبديلية للضرب non-commutative multiplication law.

هناك بعض المصفوفات الخاصة مثل:

3-4-1 المصفوفة المحايدة Identity Matrix

لا تتغير المصفوفة المضروبة بمصفوفة الوحدة (تقابل العدد 1 في الأعداد المعتادة لدينا):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$M_A I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3-4-2 المصفوفة العكسية Inverse Matrix

معكوس العدد a هو a^{-1} حيث: $aa^{-1}= a^{-1}\ a = 1$. بشكل مكافئ فان المصفوفة أيضاً لها معكوس، A^{-1} حيث:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{3.16}$$

إنه ليس بالأمر التافه تحديد معكوس أي مصفوفة (إذا كان لها معكوس) حتى وان كانت مصفوفة بسيطة أبعادها 2×2. فيما يلي مثال لمعكوس مصفوفة (لشرح واف لكيفية حساب المعكوس تحتاج لمراجعة مرجع خارجي).

$$M_A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: A^{-1} توجد إذا وفقط إذا كان للمصفوفة A رتبة تامة full rank. (انظر المحددات و الرتب في الأسفل).

3-4-3 المصفوفة المقلوبة Transpose Matrix

A^T هو مقلوب transpose المصفوفة A إذا كان:

$$A^T_{ji} = A_{ij} \tag{3.17}$$

وهنا مثال:

$$M_C^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

للمصفوفات المربعة مثل M_A يمكنك الحصول على مقلوبها من خلال الانعكاس حول القطري the diagonal (أي قلب القيم).

4-4-3 المحددات Determinants و الرتب Rank

الرتبة Rank هي عدد الصفوف (أو الأعمدة) التي لا تكون اتحادات خطية linear combinations من الصفوف الأخرى. في حالة المصفوفة المربعة A (أي m = n)، تكون A قابلة للعكس invertible إذا وفقط إذا كان لها رتبة n (نقول أن A لها رتبة تامة full rank). يكون للمصفوفة رتبة تامة عندما تكون الرتبة وهي عدد الصفوف أو الأعمدة لأي منهما الأصغر. المحددة غير الصفرية(انظر أسفل) تحدد ما إذا كان للمصفوفة رتبة تامة؛ لذا فان المحددة غير الصفرية تدل على أن للمصفوفة معكوس، و العكس بالعكس؛ إذ لو أن المحددة تساوي صفراً لكانت المصفوفة فردية singular (أي ليس لها معكوس).

محددة مصفوفة بسيطة 2×2 تعرف كالتالي:

$$\det\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right] = ad - bc \qquad (3.18)$$

في المثال التالي نستطيع القول أن للمصفوفة التالية:

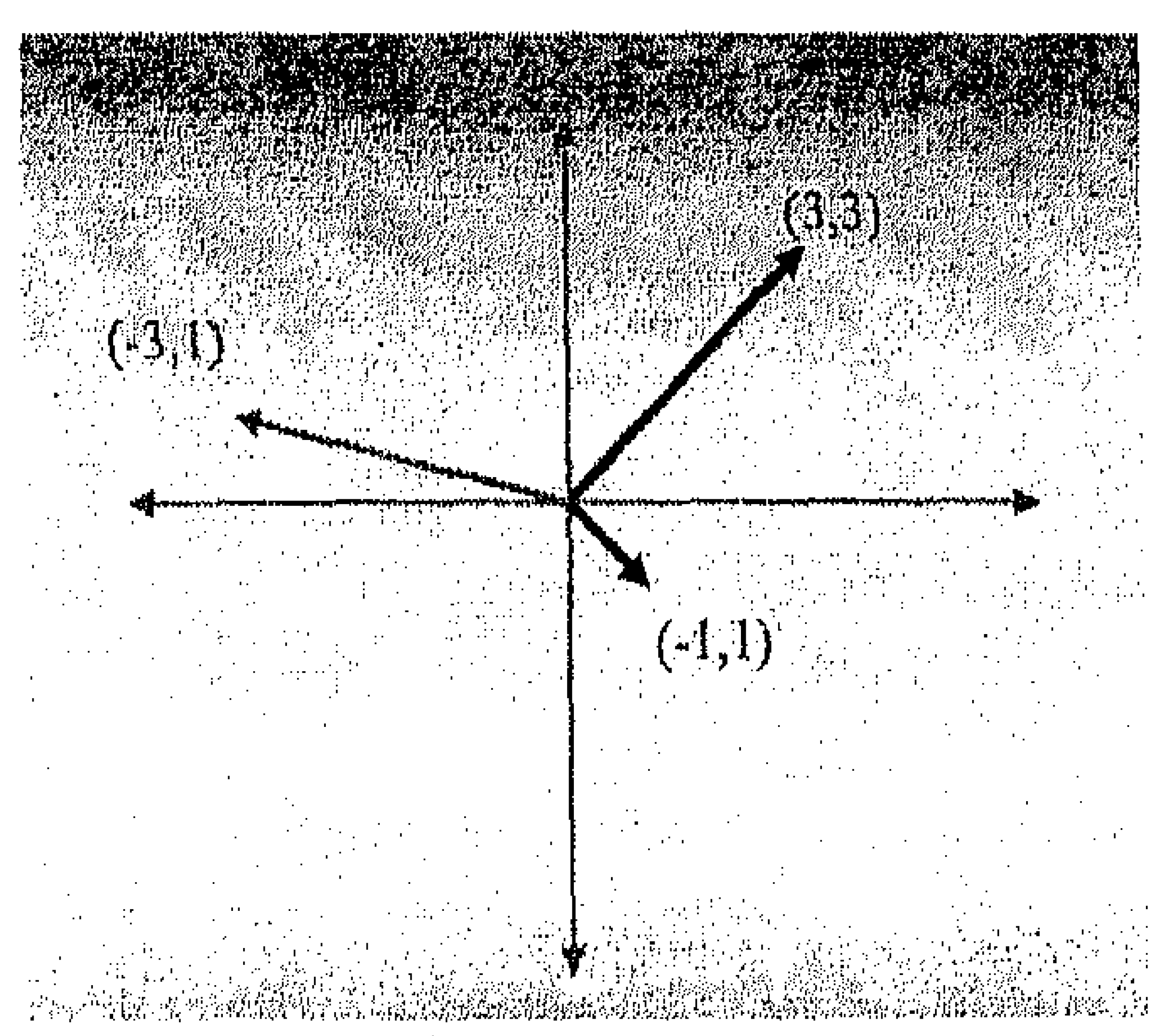
$$M_D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الرتبة 1 لان الصف الثاني هو مضاعف الصف الأول (بمقدار $\frac{3}{2}$). محددتها $(2\times6)-(3\times4)$ و تساوي صفر.

يمكن إيجاد محددات المصفوفات الأكبر من خلال تجزئتها إلى مصفوفات اصغر ذات إبعاد 2×2، فعلى سبيل المثال:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a.\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b.\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c.\det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

المحددات كالمعكوسات؛ حسابها لا يمكن اعتباره أمراً غير مجدٍ. مرة أخرى، لشرح وافٍ تحتاج لمراجعة مرجع خارجي.

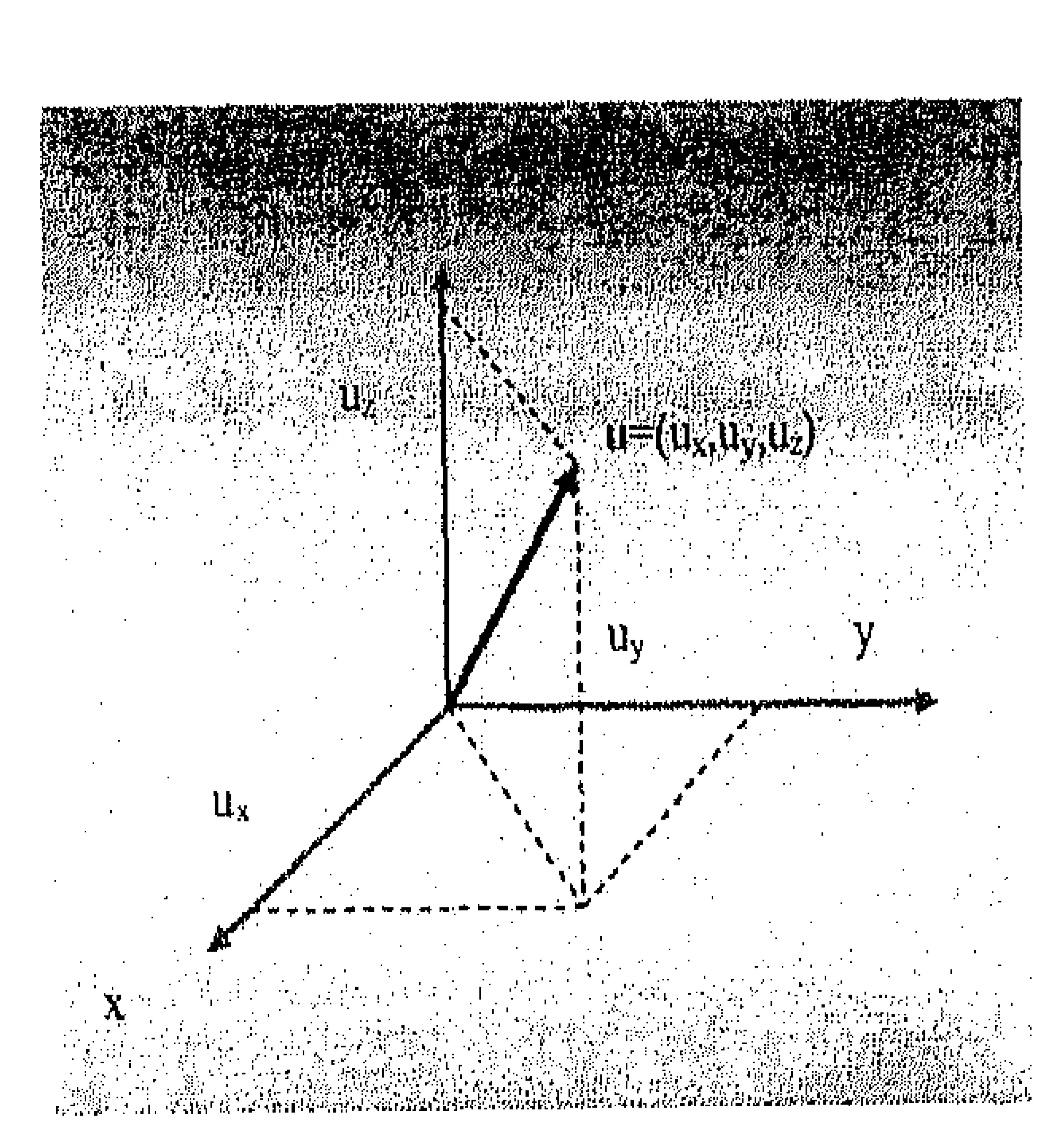


الشكل(3-3): المتجهات في $\mathbb{R}^2$

5-3 المتجهات Vectors و فضاءات المتجهات Vector Spaces

المتجهات: هي قطع مستقيمة line segments لها مقدار و اتجاه. من اجل الحوسبة الكمية تكون المتجهات في فضاء المتجه المركب complex vector space $\mathbb{C}^n$ والذي يدعى فضاء هلبرت ذو n من الأبعاد Hilbert n dimensional space. بيد أنه من المفيد النظر إلى المتجهات الأبسط في الفضاء الحقيقي أولاً (أي؛ الفضاء المعتاد ثنائي الأبعاد).

1-5-3 المتجهات في $\mathbb{R}$ Vectors in $\mathbb{R}$



الشكل(3-4): متجه ثلاثي

المتجه في $\mathbb{R}$ (الأعداد الحقيقية) يمكن تمثيله بنقطة في المستوى الديكارتي (x, y) إذا كان ذيل المتجه يبدأ من نقطة الأصل (انظر الشكل 3-3). إحداثيات x و y المتعلقة بمحوري x و y (السينات و الصادات) تدعى مركبات المتجه the components of the vector. ليس شرطا أن يبدأ ذيل المتجه من نقطة الأصل، إذ يمكن له أن يتحرك إلى أي مكان في المستوى الديكارتي طالما

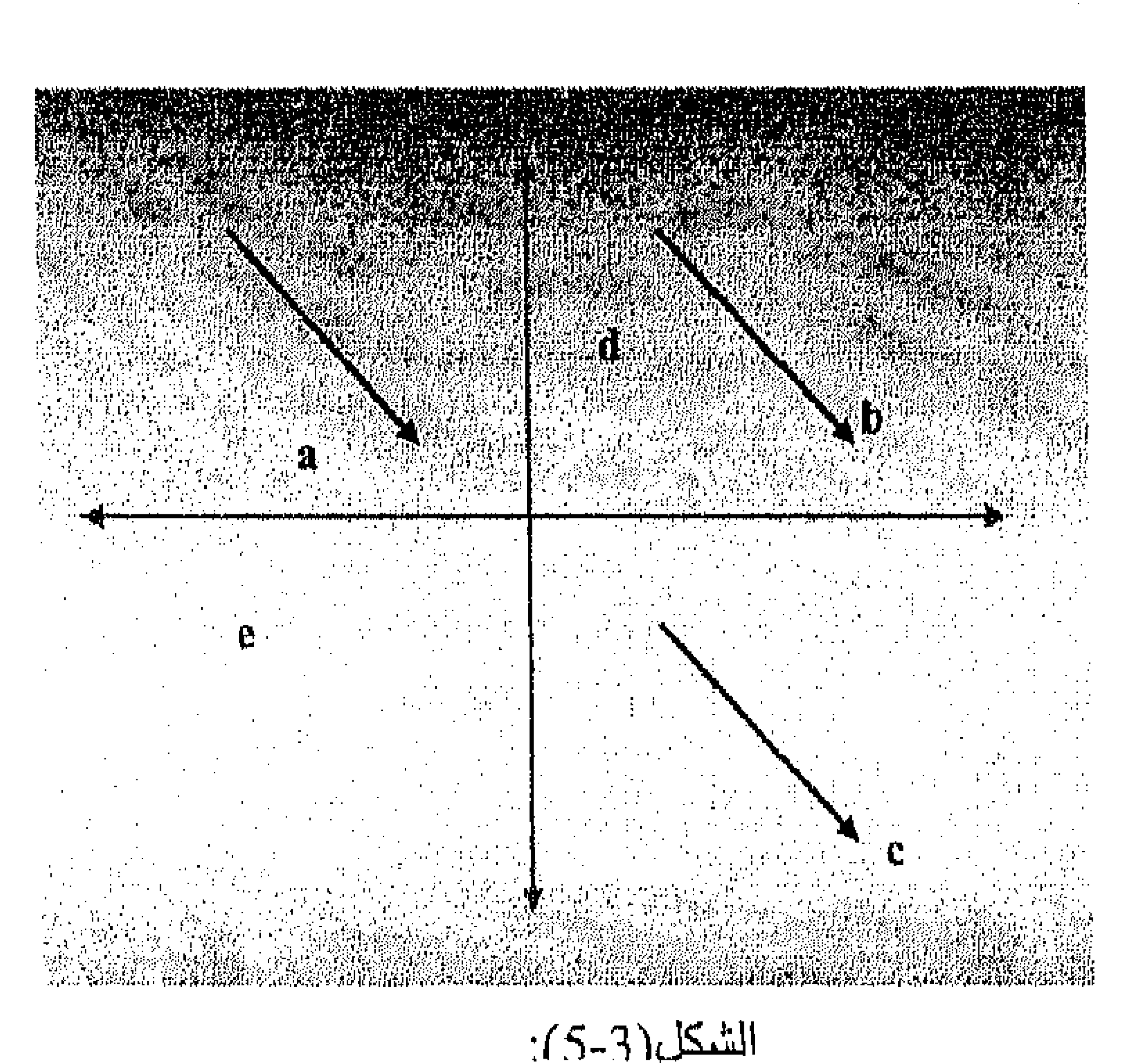
انه يحتفظ بنفس الاتجاه والطول. عندما لا تبدأ المتجهات من نقطة الأصل فإنها تكون مكونة من نقطتين: النقطة الابتدائية the initial point و النقطة النهائية the terminal point.
وبغرض التسهيل سنعتبر جميع المتجهات في $\mathbb{R}$ لها نقطة ابتدائية في الأصل، و تشير إحداثياتنا إلى النقطة النهائية.

مجموع جميع المتجهات المرافقة لجميع النقاط المختلفة في المستوى تكوّن الفضاء space $\mathbb{R}^2$. نستطيع جعل المتجه ثلاثي الأبعاد 3D باستخدام محور آخر the z axis z والامتداد إلى فضاء ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3$ (انظر الشكل 3-4). و يمكن الامتداد إلى أبعاد أكثر باستخدام الفضاء ذي n من الأبعاد $\mathbb{R}^n$.

مثال(3-8):

نقطة في فضاء خماسي الأبعاد يمثل بخمسة أزواج مرتبة (4,7,8,17,20).

نستطيع التفكير في بعض المتجهات كما لو أن لها أنظمة إحداثيات محلية local coordinate systems بحيث تكون منحرفة من الأصل. تختلف الرسوم البيانية في الحاسوب عن سواها في أن أنظمة الإحداثيات تقاس في عالم الإحداثيات و المتجهات هي النقاط النهائية التي تنتمي لذلك النظام من الإحداثيات (انظر الشكل3-6).



الشكل(3-5):

مثال(3-9): المتجهات في $\mathbb{R}$ المبينة في الشكل(3-5).

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{d} \neq \mathbf{e} \neq \mathbf{a}$$

هناك خاصيتان مهمتان للمتجهات في $\mathbb{R}^3$:

المتجهات في $\mathbb{R}^3$ تمثل هنا بحروف غامقة. اعتبر المتجهين: $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ و $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

هناك عملية مهمة هي الضرب النقطي dot product (المستخدمة لاحقا للحصول على الزاوية بين متجهين):

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \tag{3.19}$$

النقطة (•) هنا تعني ضرب داخلي inner product أو ضرب نقطي. مدخلات هذه العملية متجهان و مخرجها عدد (وليس متجها). بمعرفة المركبات نستطيع حساب المقدار the magnitude (طول المتجه) باستخدام نظرية فيثاغورس كالتالي:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z} \tag{3.20}$$

مثال(3-10):

$= (1,1,1)$

مثال(3-11):

$\mathbf{v} = (2,1,3)$

$$\cos\theta = \frac{2+1+3}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{7}}$$

3-5-2 المتجهات في $\mathbb{C}$

$V = \mathbb{C}^n$ فضاء المتجه المركب ذو n من الأبعاد، وهو مجموعة تحتوي على جميع متجهات العمود column vectors ذات n من أعداد مركبة ممتدة عموديا (الأمثلة أعلاه تمثل المتجهات الصفية row vectors ذات المركبات الممتدة أفقيا). و نعرّف أيضا فضاء المتجه

الثانوي vector subspace الذي هو مجموعة غير فارغة من المتجهات الذي يحقق نفس الشروط التى يحققها فضاء المتجه الأم.

على سبيل المثال فى $\mathbb{C}^2$ الرمز الميكانيكي الكمي للكيت ket يمكن أن يستخدم لتمثيل المتجه

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

حيث: $u_1 = a_1 + b_1 i$ و $u_2 = a_2 + b_2 i$

$|u\rangle$ أيضا يمكن تمثيله بصيغة الصف

$$|u\rangle = (u_1, u_2) \quad (3.22)$$

مثال(3−12): رمز العمود

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال(3−13): هذا مثال اعقد قليلا

$$\begin{aligned} |u\rangle &= (1+i)|0\rangle + (2-3i)|1\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

من الممكن تلخيص خصائص المتجهات في $\mathbb{C}^n$ كما يلي:

الكميات العددية $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ والمتجهات $(|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle) \in \mathbb{C}^n$

- **الضرب العددي**

بعض الخصائص الأساسية لضرب و جمع الكميات العددية المركبة مدرجة هنا:

$$\alpha|u\rangle = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\alpha(\beta|u\rangle) = \alpha\beta|u\rangle \tag{3.24}$$

(3.25) قانون العملية الترافقية للضرب القياسي $\alpha(|u\rangle + |v\rangle) = \alpha|u\rangle + \alpha|v\rangle$

(3.26) قانون العملية التوزيعية للجمع القياسي $(\alpha + \beta)|u\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|u\rangle$

$$\alpha(|u\rangle + |v\rangle) = \alpha|u\rangle + \alpha|v\rangle \tag{3.27}$$

- **جمع المتجهات**

جمع المتجهات يمكن تمثيله كما يلي:

$$|u\rangle + |v\rangle = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

هذا الجمع يتمتع بالخصائص التالية:

(3.29) تبديلي $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$

(3.30) ترافقي $(|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle = |u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle)$

$$|u\rangle + 0 = |u\rangle \tag{3.31}$$

لكل $|u\rangle \in \mathbb{C}^n$ هناك متجه فريد مرافق $-|u\rangle$ بحيث:

$$|u\rangle + (-|u\rangle) = 0 \tag{3.32}$$

3-5-3 المتجه الثنائي The Dual Vector

المتجه الثنائي $\langle u|$ المطابق لمتجه الكيت $|u\rangle$ يتم الحصول عليه من خلال قلب متجه العمود المطابق و اخذ مرافق العدد المركب لمركباته. وهذا يسمى في ميكانيكا الكم "برا" bra حيث

$$\langle u| = |u\rangle^{\dagger} = [u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*] \qquad (3.33)$$

علامة الخنجر dagger symbol (†)، تسمى المجاور the adjoint.

مثال(3-14): الثنائي للمتجه $\langle 0|$:

$$\langle 0| = |0\rangle^{\dagger} = [1^*, 0^*]$$

مثال(3-15):

لدينا المتجه $\langle u|$ حيث: $|u\rangle = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$

$$\langle u| = [(1-i)^*, (1+i)^*]$$
$$= [(1+i), (1-i)]$$

3-5-4 الاتحادات الخطية Linear Combinations

المتجه $\langle u|$ هو اتحاد خطي من المتجهات $\langle u_1|, |u_2\rangle, ..., |u_n\rangle$ إذا كان $\langle u|$ يمكن التعبير عنه بما يلي:

$$|u\rangle = \alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle + ... + \alpha_n|u_n\rangle \qquad (3.34)$$

حيث الكميات القياسية $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ هي أعداد مركبة. يمكننا تمثيل الاتحاد الخطي كما يلي:

$$|u\rangle = \sum \alpha_i |v_i\rangle \qquad (3.35)$$

3-5-5 الاستقلال الخطي Linear Independence

مجموعة المتجهات غير الصفرية $\langle v_1|, ..., |v_n\rangle$ تكون مستقلة خطيا إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i |v_i\rangle = 0 \qquad (3.36)$$

إذا و فقط إذا كان $a_1 = ... = a_n = 0$

مثال(3-16): الاعتماد(عدم الاستقلال) الخطي:

متجهات الصف row vectors $[-2,-1],[1,2],[1,-1]$ غير مستقلة خطيا لان:

$$[1,-1]+[1,2]-[2,1]=[0,0]$$

أي؛ أن هناك اتحادا خطيا حيث: $a_3=-1, a_2=1, a_1=-1$ لها قيم غير الصفر(وهذا مخالف لشرط الصفرية أعلاه)، لذا هي ليست مستقلة خطيا.

3-5-6 المجموعة الممتدة Spanning Set

وهي مجموعة من المتجهات $|v_1\rangle,...,|v_n\rangle$ في V التي بدلالتها يمكن كتابة كل متجه في V كاتحاد خطي.

مثال(3-17):

$\mathbf{w}=[0,0,1], \mathbf{v}=[0,1,0], \mathbf{u}=[1,0,0]$ x,y,z

في $\mathbb{R}^3$ يمكن كتابتها كاتحاد خطي من كل من u و v و w كالتالي:

$$[x,y,z]=x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+z\mathbf{w}$$

3-5-7 الأساس Basis

وهو أي مجموعة من المتجهات التي تكوّن مجموعة ممتدة وتكون مستقلة خطيا.

في الحوسبة الكمية سنستخدم معظم الوقت أساسا معياريا يسمى الأساس الحوسبي computational basis، ويسمى أيضا الأساس العمودي- المعيرorthonormal. في $\mathbb{C}^2$ يمكننا استخدام $|0\rangle$ و $|1\rangle$ للأساس. وفي $\mathbb{C}^4$ يمكننا استخدام $|00\rangle$ و $|01\rangle$ و $|10\rangle$ و $|11\rangle$ للأساس (الضرب الممتد tensor product ضروري لفهم هذا؛ انظر الجزء).

3-5-8 سعات الاحتمال Probability Amplitudes

نستطيع كتابة المتجه كاتحاد combination متجهات الأساس. في ميكانيكا الكم نستخدم متجه الحالةstate vector $|\psi\rangle$. متجه الحالة في $\mathbb{C}^2$ يكتب غالبا على الشكل:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

الكميات العددية(مثل α و β في $\langle\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$) المرافقة لمتجهات أساسنا تسمى سعات الاحتمال؛ لأنهم في ميكانيكا الكم يعطون احتمالات إسقاط الحالة على أساس الحالة، $\langle 0|$ أو $\langle 1|$، عندما ينجز القياس المناسب.

لنكون على اتفاق مع تفسير ماهية الاحتمال، يجب أن يساوي مجموع مربعات القيم المطلقة لسعات الاحتمال المقدار 1:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

مثال(3-18):

حدد احتمالات قياس $\langle 0|$ أو $\langle 1|$ لما يلي: $\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle = \left|\sqrt{\frac{1}{3}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= 1$$

مجموع الاحتمالات 1، لذا حول إلى النسب المئوية

$$\frac{1}{3}(100) = 33.\dot{3} \qquad \text{و} \qquad \frac{2}{3}(100) = 66.\dot{6}$$

لذا فان هذا يعطينا $33.\dot{3}\%$ فرصة لقياس $\langle 0|$ و $66.\dot{6}\%$ فرصة لقياس $\langle 1|$.

3-5-9 الضرب الداخلي The Inner Product

تناولنا فيما سبق الضرب الداخلي أو النقطي في $\mathbb{R}^2$ في الجزء(3.7.1). الضرب الداخلي في الحوسبة الكمية يعرّف بدلالة $\mathbb{C}^n$، لكن من المفيد التفكير بما يعطينا الضرب الداخلي في $\mathbb{R}^2$؛ والتي هي الزاوية بين متجهين. الضرب النقطي في $\mathbb{R}^2$ موضح عنا (كذلك انظر الشكل(3-6))

الشكل(3-6): الضرب العددي.

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{3.37}$$

و بإعادة الترتيب نحصل على:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) \tag{3.38}$$

الآن سنلقي نظرة على الضرب في $\mathbb{C}^n$، والمعرّف بدلالة الثنائي. الضرب الداخلي في $\mathbb{C}^n$ يربط بين متجهين و ينتج عدداً مركباً، لذا لو كان لدينا:

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad |v\rangle = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

نستطيع حساب الضرب الداخلي كما يلي:

$$\left[\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\right]\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \langle u|\times|v\rangle \quad = \langle u|v\rangle \tag{3.39}$$

يمكن تمثيل الضرب الداخلي أيضا بالصيغة التالية:

$$(|u\rangle,|v\rangle)=\langle u|v\rangle \qquad (3.40)$$

لذا فجميع التعابير التالية هي متكافئات في الفضاء $\mathbb{C}^2$:

$$\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)=(|u\rangle,|v\rangle)=\langle u|\times|v\rangle=\langle u|v\rangle=[u_1^*,u_2^*]\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=u_1^*v_1+u_2^*v_2$$

مثال(3-19):

باستخدام رمز الضرب الداخلي أعلاه نستطيع استخراج سعة الاحتمال إذا استخدمنا واحدا من متجهات الأساس كثنائي للمتجه الأصلي:

$$\langle 0|(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)=[1^*,0^*]\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\alpha$$

أو باستخدام رمز الضرب النقطي

$$\langle 0|(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\alpha$$

إن هذا يسمى رمز"برا-كيت" bra-ket notation. و فضاء هلبرت Hilbert space هو فضاء المتجه للضرب الداخلي المركب.

خصائص:

$$\langle u|v\rangle=\langle v|u\rangle^* \qquad (3.41)$$

$$\langle u|\alpha v\rangle=\langle \alpha^* u|v\rangle=\alpha\langle u|v\rangle \qquad (3.42)$$

$$\langle u|v+w\rangle=\langle u|v\rangle=\langle u|w\rangle \qquad (3.43)$$

$$\forall|u\rangle[\ \mathbb{R}\ni\langle u|u\rangle\geq 0\ ] \qquad (3.44)$$

إذا كان $\langle u|u\rangle=0$ فان $|u\rangle=0$ (3.45)

(3.46) متباينة كوشي- شوارتز The Cauchy-Schwartz inequality

$$|\langle u|v\rangle|^2 \le \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle$$

3-5-10 التعامد Orthogonality

المتجهات المتعامدة Orthogonal يمكن التفكير بها على أنها "متعامدة على بعضها بعضاً"، يكون المتجهان متعامدان إذا وفقط إذا

$$|u\rangle \ne 0, |v\rangle \ne 0, \langle u|u\rangle = 0 \qquad (3.47)$$

مثال(3-20):

المتجهان: $|u\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $|v\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

متعامدان لان: $\left[1^*, 0^*\right]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0$

مثال(3-21):

المتجهان: $|u\rangle = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و $|v\rangle = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

متعامدان لان:

$$\langle u|v\rangle = ((1,1),(1,-1)) = 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$$

مثال(3-22):

المتجهان: $|u\rangle = \begin{bmatrix}1+i\\2-2i\end{bmatrix}$ و $|v\rangle = \begin{bmatrix}-i\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

متعامدان بسبب:
$$[1-i, 2+2i]\begin{bmatrix}-i\\ 1\\ \frac{}{2}\end{bmatrix}=0$$

3-5-11 متجه الوحدة The Unit Vector

إن معيار المتجه vector's norm هو:

$$\||u\rangle\|=\sqrt{\langle u|u\rangle} \tag{3.48}$$

متجه الوحدة هو المتجه الذي يكون معيار متجهه يساوي 1.

$$\||u\rangle\|=1 \tag{3.49}$$

إذا أردنا جعل متجه اختياري متجه وحدة_ والذي يمثل هنا برمز القبعة (^). يجب أن نعايره normalize من خلال القسمة على المعيار norm

$$|\hat{u}\rangle=\frac{|u\rangle}{\||u\rangle\|} \tag{3.50}$$

مثال(3-23):

$$(=|0\rangle+|1\rangle)$$

أولا: نجد المعيار:

$$\||u\rangle\|=\sqrt{[1^*,1^*]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}=\sqrt{2}$$

نقوم الآن بمعايرة $\||u\rangle\|$ للحصول على:

$$|u\rangle=\frac{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

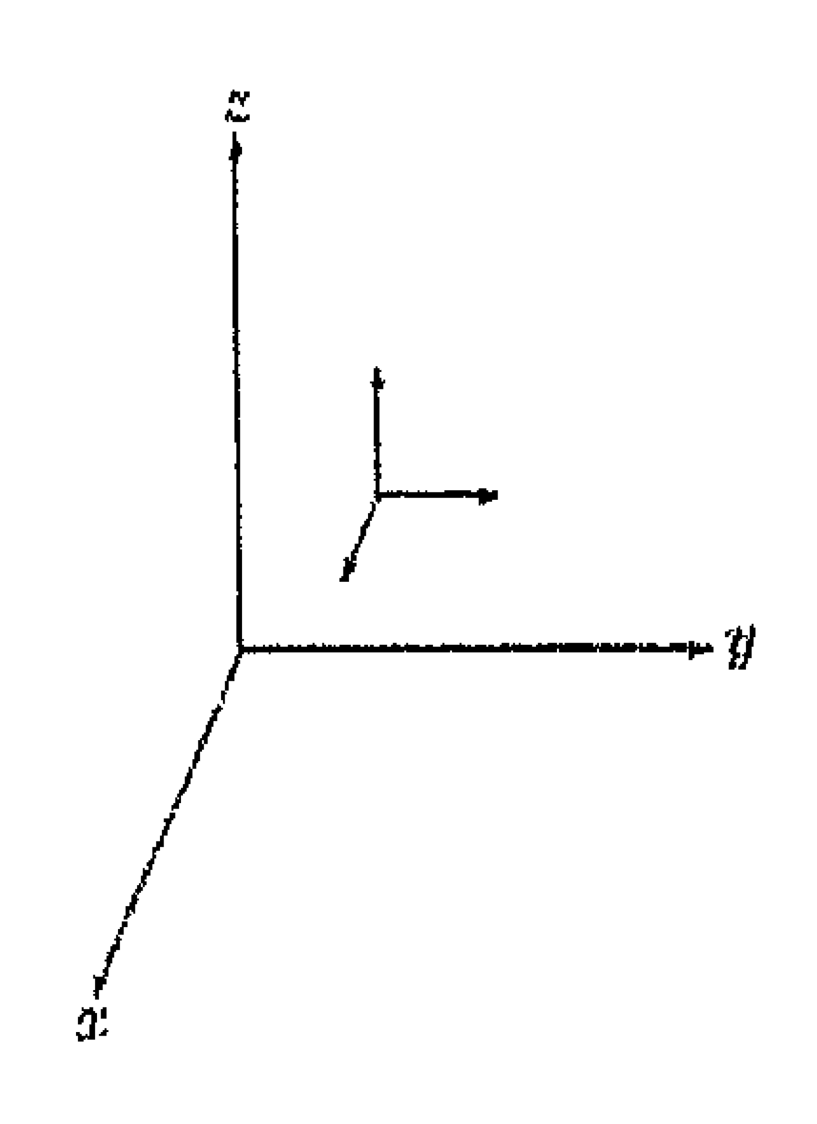
12-5-3 الأسس للفضاء $\mathbb{C}^n$ Basis for $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n$ لها أساس معياري والذي هو(انظر 9.7.3)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

هذه يمكن كتابتها كالتالي:

$|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle$. أي متجه آخر في نفس الفضاء يمكن فكه بدلالة $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle$. يسمى الأساس عمودي-معايرorthonormal لان المتجهات طولها وحدة واحدة وتكون متعامدة على بعضها بشكل متبادل. و هناك أساسات عمودية-معايرة أخرى في $\mathbb{C}^n$، وانه لمن المألوف في بعض الأحيان_في الحوسبة الكمية_



الشكل(3-7): نظام احداثيات

التغيير بين الأساسات.

مثال(3-24):

الأساسات العمودية-المعايرة $|0\rangle$ و $|1\rangle$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$ غالبا ما تستخدم في الحوسبة الكمية.

إنه لمن المفيد في هذه النقطة اعتبار ماهية الأساس العمودي-المعاير في $\mathbb{R}^3$.

إن كلمة "عمودي" عائدة إلى كون المتجهات متعامدة بعضها على بعض؛ فعلى سبيل المثال محاور الفضاء ثلاثي الأبعاد (x, y, z) هي متعامدة على بعضها. وكلمة "معاير" تعني أن المتجهات معايرة ليكون طول واحدها وحدة واحدة unit.

نستطيع استخدام أساس عمودي-معاير في $\mathbb{R}^3$ لفصل إحداثيات العالم من نظام إحداثي محلي في رسوم بيانية حاسبية بثلاثة أبعاد. في هذا النظام نعرّف الموقع للنظام ألإحداثي المحلي في إحداثيات العالم و بعدها نستطيع تعريف مواقع الأشياء كل على حدة بلغة نظام الإحداث المحلي. بهذه الطريقة نستطيع نقل نظام الإحداثيات المحلية معاً بكل ما فيها تاركين نظام إحداثيات العالم سليمة. في الشكل(3-7) يشكل نظام ألإحداثي المحلي أساساً عمودياً-معايرا.

3-5-13 طريقة غرام-شميدت The Gram Schmidt Method

افترض أن $|u_1\rangle,\ldots,|u_n\rangle$ هو أساس (يمكن اعتبار أي أساس) لفضاء المتجه V الذي له ضرب داخلي. وافترض أن هذا الأساس ليس عمودياً-معايرا.

تستخدم طريقة غرام-شميدت لإنتاج مجموعة من الأساسات العمودية-المعايرة $|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle$ لفضاء المتجه V بواسطة:

$$|v_1\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\left\| |u_1\rangle \right\|} \qquad (3.52)$$

و لدينا $|v_{k+1}\rangle$ ل $(1 \le k < n-1)$:

$$|v_{k+1}\rangle = \frac{|u_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k}\langle v_i|u_{k+1}\rangle|v_i\rangle}{\left\| |u_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k}\langle v_i|u_{k+1}\rangle|v_i\rangle \right\|} \tag{3.53}$$

مثال(3−25):

لدينا المتجهات التالية في $\mathbb{C}^3$: $|u_1\rangle = (i,i,i)$ و $|u_2\rangle = (0,i,i)$ و $|u_3\rangle = (0,0,i)$. جد الأساس العمودي−المعاير $|v_1\rangle$ و $|v_2\rangle$ و $|v_3\rangle$.

$$|v_1\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\||u_1\rangle\|}$$

$$= \frac{(i,i,i)}{\sqrt{3}}$$

$$= \left(\tfrac{i}{\sqrt{3}}, \tfrac{i}{\sqrt{3}}, \tfrac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|v_2\rangle = \frac{|u_2\rangle - \langle v_1|u_2\rangle|v_1\rangle}{\left\| |u_2\rangle - \langle v_1|u_2\rangle|v_1\rangle \right\|}$$

$$= \left(-\tfrac{2i}{\sqrt{6}}, \tfrac{i}{\sqrt{6}}, \tfrac{i}{\sqrt{6}}\right)$$

$$|v_3\rangle = \frac{|u_3\rangle - \langle v_1|u_3\rangle|v_1\rangle - \langle v_2|u_3\rangle|v_2\rangle}{\left\| |u_3\rangle - \langle v_1|u_3\rangle|v_1\rangle - \langle v_2|u_3\rangle|v_2\rangle \right\|}$$

$$= \left(0, \tfrac{i}{2}, \tfrac{i}{2}\right)$$

3−5−14 المؤثرات الخطية Linear Operators

يعرف المؤثر الخطيA: $V \rightarrow W$ حيث: V و W هما: فضاءا متجه مركب:

$$A(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle) = \alpha(A(|u\rangle) + \beta(A|v\rangle)) \tag{3.54}$$

يمكن تمثيل المؤثر الخطي بمصفوفة أبعادها $m \times n$، حيث: n أبعاد V و m أبعاد W .

مثال(3−26):

لديك المؤثر الخطي A ، طبقه ل: $\sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\rangle$

$$A\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle+\sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\rangle\right)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle+\sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\rangle\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{1}{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle+\sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\rangle$$

من خصائص المؤثرات الخطية:

$\langle u|A|v\rangle$ هو الضرب الداخلي لكل من: $\langle u|$ و $A|v\rangle$.

3-5-15 الضرب الخارجي و المسقطات Outer Products and Projectors

نعرف الضرب الخارجي $|u\rangle\langle v|$ بأنه: مؤثر خطي يحقق ما يلي:

$$(|u\rangle\langle v|)(|w\rangle)=|u\rangle\langle v|w\rangle=\langle v|w\rangle|u\rangle \tag{3.55}$$

و التي تقرا على النحو:

1. ناتج تأثير المؤثر الخطي $|u\rangle\langle v|$ على $|w\rangle$،

أو

2. حاصل ضرب $|u\rangle$ و $\langle v|w\rangle$

بلغة المصفوفات؛ $|u\rangle\langle v|$ يمكن أن يمثل ب:

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^* & v_2^* & \dots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1v_1^* & u_1v_2^* & \dots & u_1v_n^*\\u_2v_1^* & u_2v_2^* & \dots & u_2v_n^*\\\vdots & & \ddots & \\u_nv_1^* & u_nv_2^* & \dots & u_nv_n^*\end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

مثال(3-27):

لديك $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ ل $|w\rangle$، عندئذٍ:

$$|1\rangle\langle 1|\psi\rangle=|1\rangle\langle 1|(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$$

$$=|1\rangle\beta$$
$$=\beta|1\rangle$$
$$|0\rangle\langle 1|\psi\rangle=|0\rangle\langle 1|(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$$
$$=|0\rangle\beta$$
$$=\beta|0\rangle$$
$$|1\rangle\langle 0|\psi\rangle=|1\rangle\langle 0|(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$$
$$=|1\rangle\alpha$$
$$=\alpha|1\rangle$$
$$|0\rangle\langle 0|\psi\rangle=|0\rangle\langle 0|(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$$
$$=|0\rangle\alpha$$
$$=\alpha|0\rangle$$

في الفصول القادمة سنستخدم المساقط للتعامل مع القياسات الكمية. لنفرض أن لدينا فضاء المتجه $V=\{|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle\}$. يتصرف المسقط P على الفضاء الثانوي $V_s=\{|00\rangle,|01\rangle\}$ كالتالي:

$$P(\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle+\alpha_{10}|10\rangle+\alpha_{11}|11\rangle)=\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle$$

P يسقط أي متجه في V على V_s (المركبات التي ليست في V_s تنبذ). نستطيع تمثيل المسقطات باستخدام تمثيل الضرب الخارجي. إذا كان لدينا فضاء ثانوي ممتد باستخدام متجهات عمودية-معايرة $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,\ldots,|u_n\rangle\}$، يمكن أن يمثل الإسقاط على هذا الفضاء الثانوي باستخدام مجموع الضرب الخارجي:

$$P=\sum_{i=1}^{n}|u_i\rangle\langle u_i|$$

$$=|u_1\rangle\langle u_1|+|u_2\rangle\langle u_2|+\ldots+|u_n\rangle\langle u_n|$$

لذا، نستطيع استبدال رمز الضرب الخارجي الصريح برمز المسقط:

$$\left(|00\rangle\langle 00|+|01\rangle\langle 01|\right)\left(\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle+\alpha_{10}|10\rangle+\alpha_{11}|11\rangle\right)=\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle$$

نستطيع أيضا تمثيل مصفوفة (مؤثر على سبيل المثال) باستخدام رمز الضرب الخارجي، كما هو مبين في المثال التالي:

مثال(3-28): تمثيل المؤثرين X و Z.

هاتان المصفوفتان المعرفتان في الأسفل، تثبتان أنهما ملائمتان للحوسبة الكمية. في الفصول اللاحقة سنستخدم كل منهما بشكل متكرر:

$$|0\rangle\langle 1|=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0^* & 1^*\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 1|=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0^* & 1^*\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$|0\rangle\langle 0|=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^* & 0^*\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 0|=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^* & 0^*\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$
$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

أدناه بعض الخصائص:

- علاقة الكمال The completeness relation $\sum_i |i\rangle\langle i| = I$ لأي أساس عمودي-معاير $\{|i\rangle\}$
- لدينا الفضاء الثانوي $V_s = |1\rangle, \ldots, |k\rangle$ ، عندئذٍ:

$$V = |1\rangle, \ldots, |k\rangle |k+1\rangle, \ldots, |d\rangle$$

- كل مركبة $|u\rangle\langle u|$ من مركبات P تكون هيرميتية و P كذلك هيرميتية.

$$P^{\dagger} = P$$

$$P^2 = P$$

$Q = I - P$ تسمى المتممة العمودية orthogonal complement وهي مسقط على $|k+1\rangle, \ldots, |d\rangle$.

لاحظ كيف أننا أجرينا تغييراً طفيفاً هنا على الرمز Σ. بقولنا $\sum_i |i\rangle\langle i|$؛ في الواقع نحن نعني" لكل عنصر n في المجموعة $\{|i\rangle\}$، وبعدها يضاف $|n\rangle\langle n|$ للناتج". لاحقاً سنلقي نظرة على القياسات الكمية و سنستخدم Mm لتمثيل القياس. إذا قمنا باستخدام المسقط ($Mm = P$) للقياس، عندها يكون احتمال قياس m هو:

$$\Pr(m) = \langle \Psi | M_m{}^{\dagger} M_m | \Psi \rangle$$

وهذه مكافئة للعلاقة:

$$\Pr(m) = \langle \Psi | M_m | \Psi \rangle$$

3-5-15 المجاور The Adjoint

المجاور $A^{\dagger}$ هو مصفوفة تنتج من A من خلال الإتيان بالمرافق لكل عنصر في A (للحصول على (A^{*})) و من ثم قلب المصفوفة:

$$A^{\dagger} = \left(A^{*}\right)^{T} \tag{3.57}$$

مثال(3-29): المجاور.

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

خصائص:

$$A|u\rangle = \langle \mathrm{u}|A^{\dagger} \tag{3.58}$$

$$\langle \mathrm{u}|\mathrm{Av}\rangle = \langle A^{\dagger}u|v\rangle \tag{3.59}$$

$$(\mathrm{AB})^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \tag{3.60}$$

$$\left(A^{\dagger}\right)^{\dagger} = A \tag{3.61}$$

$$\left(|u\rangle\right)^{\dagger} = \langle u| \tag{3.62}$$

$A|u\rangle = \langle u|A^{\dagger}$ و ليس $\left(A|u\rangle\right)^{\dagger} = \langle u|A^{\dagger}$ (3.63)

$$(\alpha A + \beta B)^{\dagger} = \alpha^{*}A^{\dagger} + \beta^{*}B^{\dagger} \tag{3.64}$$

مثال(3-30): $\langle \mathrm{u}|\mathrm{Av}\rangle = \langle A^{\dagger}u|v\rangle$.

لدينا: $|u\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ و $|v\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A|v\rangle = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle u | Av \rangle = 2$$

$$A^{\dagger}|u\rangle = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2i \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

$$\langle A^{\dagger}u | v \rangle = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2$$

16-5-3 القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

العدد المركب λ هو قيمة مميزة للمؤثر الخطي A إذا وجد متجه $|u\rangle$ بحيث:

$$A|u\rangle = \lambda|u\rangle \tag{3.65}$$

حيث يسمى $|u\rangle$ المتجه المميز للمؤثر A.

يمكن إيجاد القيم المميزة للمؤثر A من خلال استخدام المعادلة التالية المسماة المعادلة المميزة characteristic equation للمؤثر A.

$$c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.66}$$

هذه المعادلة تتأتى من ملاحظة أن:

$$A|u\rangle = \lambda|u\rangle \Leftrightarrow (A - \lambda I)|u\rangle = 0 \Leftrightarrow A - \lambda I \quad \text{is singular} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

حل المعادلة المميزة يعطينا متعدد الحدود المميز characteristic polynomial للمؤثر A، الذي نحصل بحله على جميع القيم المميزة للمؤثر A. إذا كانت A مصفوفة أبعادها $n \times n$ فإن هناك n قيم مميزة(ولكن يمكن أن يكون بعضها مشابها للبعض الآخر)

خصائص:

- المؤثر A ذو القيمة المميزة رتبة i λ_i له متجه مميز $|u_i\rangle$ إذا و فقط إذا $A|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$.
- الفضاء المميز(eigenspace) للعدد المركب λ_i هو مجموعة من متجهات مميزة تحقق العلاقة:

$$A|u_j\rangle = \lambda_i|u_j\rangle$$

j هي دليل متجهات مميزة للعدد المركب λ_i.

- الفضاء المميز eigenspace يكون مضمحلا degenerate عندما يكون له أبعاد > 1 أي: أكثر من متجه مميز واحد.

ملاحظة: المتجهات المميزة التي لها قيم مميزة مختلفة تكون مستقلة خطياً، مما يعني إمكانية وجود مجموعة من متجهات مميزة العمودية-المعايرة لمؤثر A .

مثال(3-31): القيم المميزة والمتجهات المميزة ل(X)

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(X - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 1$$

هذا هو متعدد الحدود المميز. $\lambda^2 - 1$ لها حلان: $\lambda = -1$ و $\lambda = +1$. إذا استخدمنا القيمة المميزة $\lambda = -1$ لتحديد المتجه المميز المقابل $|\lambda_{-1}\rangle$ ل(X) عندها نحصل على:

$$X|\lambda_{-1}\rangle = -1|\lambda_{-1}\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

هذا يعطينا: $\alpha = -\beta$، لذا و بعد التعبير يكون المتجه المميز:

$$|\lambda_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$\lambda = -1$$

3-5-17 الأثر Trace

الأثر للمؤثر A هو مجموع القيم المميزة لها، أو:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (3.67)$$

أي: مجموع مدخلاتها القطرية.

مثال(3-32): Trace لكل من X و I

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$tr(X) = 0 + 0 = 0$ $\qquad + (-1) = 0$ $\qquad tr(I) = 2$

خصائص:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \qquad (3.68)$$

$$tr(\alpha(A+B)) = \alpha tr(A) + \alpha tr(B) \qquad (3.69)$$

$$tr(AB) = tr(BA) \qquad (3.70)$$

$$tr(|u\rangle\langle v|) = \langle u|v\rangle \qquad (3.71)$$

$$tr(\alpha A) = \alpha tr(A) \qquad (3.72)$$

(3.73) تحويل التشابه Similarity transform $\quad tr(UAU^{\dagger}) = tr(A)$

$$tr(U^{\dagger}AU) = tr(A) \qquad (3.74)$$

(3.75) $tr(A|u\rangle\langle u|) = \langle u|A|u\rangle$ إذا كانت $|u\rangle$ وحدوية

لمعيار الوحدة unit norm $|u\rangle$:

$$tr(|u\rangle\langle u|) = tr(|u\rangle\langle u||u\rangle\langle u|) \quad (3.76)$$

$$= \langle u||u\rangle\langle u||u\rangle \quad (3.77)$$

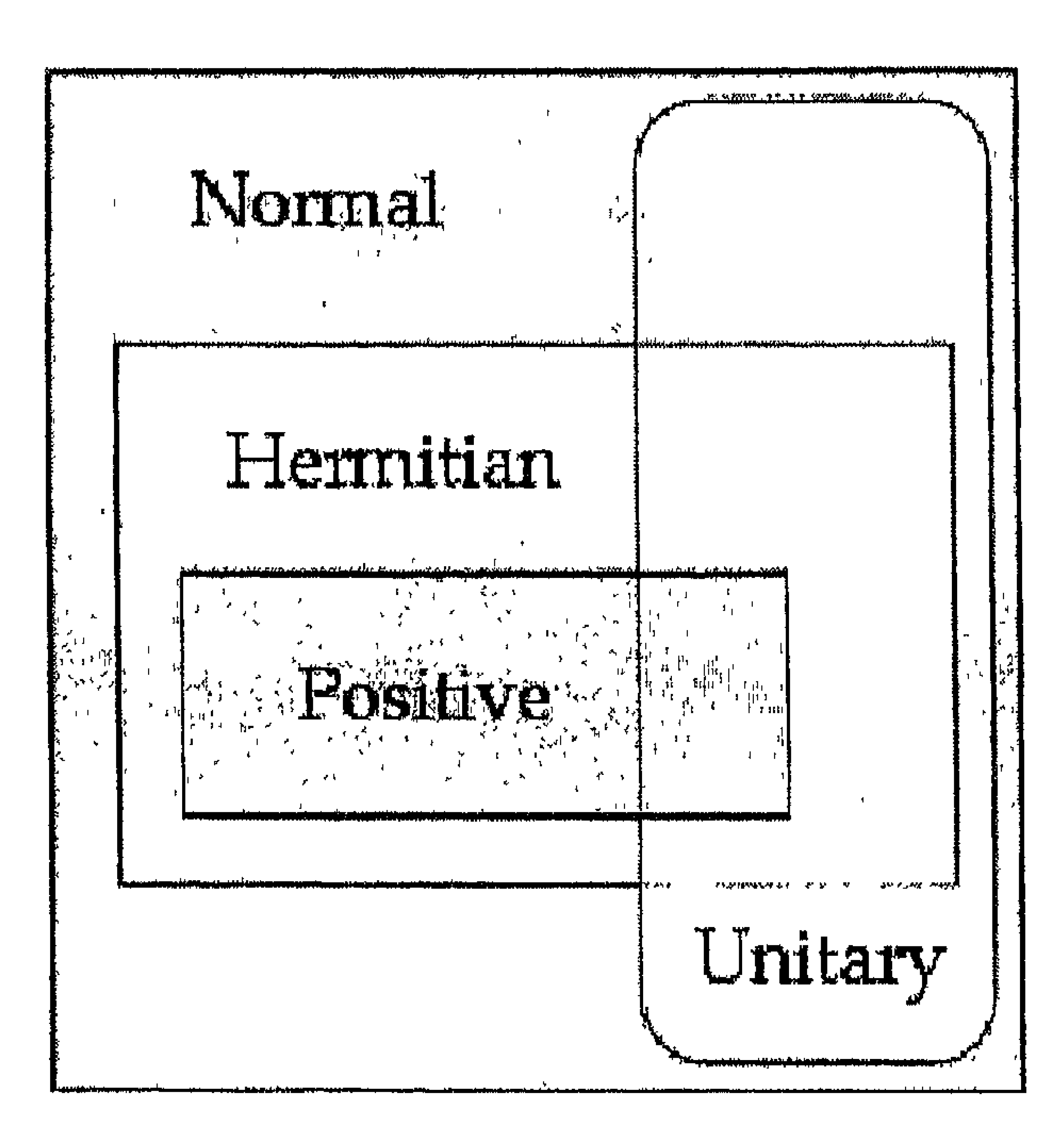
$$= \langle u|u\rangle\langle u|u\rangle \quad (3.78)$$

$$= \||u\rangle|^4 = 1 \quad (3.79)$$

كما تقدم فإن الأثر trace ل(A) هو: مجموع القيم المميزة لها، نستطيع القول أيضاً بأن:

$$U^\dagger A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

التي لها أثر هو مجموع القيم المميزة للمؤثر A بحيث $U^\dagger A U = tr(A)$.



الشكل(3-8): العلاقات بين

3-5-18 المؤثرات العمودية Normal Operators

المؤثر العمودي يحقق الشرط التالي:

$$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A \tag{3.80}$$

إن لصنف المؤثرات العمودية عدد من المجموعات الثانوية. في الأجزاء اللاحقة سنلقي نظرة على بعض هذه المؤثرات المهمة التي تشمل: المؤثرات الوحدوية و المؤثرات الهيرميتية و المؤثرات الإيجابية. العلاقة بين هذه المؤثرات مشاهدة في الشكل (3-8).

3-5-19 المؤثرات الوحدوية Unitary

المصفوفة U هي مصفوفة وحدوية (المؤثرات الوحدوية تمثل عادة بالرمز U) إذا كان:

$$U^{-1} = U^{\dagger} \tag{3.81}$$

أو

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I \tag{3.82}$$

لمتجهات مميزة للمصفوفات الوحدوية معاملاً قيمته 1:

$$\|U|u\rangle\| = \||u\rangle\| \forall |u\rangle \tag{3.83}$$

المؤثرات الوحدوية لها خاصيتي الاحتفاظ بالمعيار و قابلية العكس invertible. وهناك بعض المؤثرات ذات أهمية استثنائية تسمى مؤثرات باولي Pauli operators. رأينا للتو بعضاً منها و قد أشير إليها بالحروف I و X و Y و Z . في بعض النصوص يشار إلى X و Y و Z برموز أخرى بحيث: $\sigma_1 = \sigma_X = X$ و $\sigma_2 = \sigma_Y = Y$ و $\sigma_3 = \sigma_Z = Z$. تعرف مؤثرات باولي على النحو:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

مثال(3-33): I وX و Y و Z وحدوية لان:

$$II^{\dagger} = I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$XX^{\dagger} = X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$YY^{\dagger} = Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ZZ^{\dagger} = Z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: $I = I^{\dagger}$ و $X = X^{\dagger}$ و $Y = Y^{\dagger}$ و $Z = Z^{\dagger}$.

خصائص المؤثرات الوحدوية:

$$U = \sum_j |j\rangle\langle j| \tag{3.88}$$

$$\left(U|u\rangle, U|v\rangle\right) = \langle u|U^{\dagger}U|v\rangle = \langle u|v\rangle \tag{3.89}$$

(3.90) المؤثرات الوحدوية تكون عمودية

(3.91) المصفوفات الوحدوية تسمح للتجزئة الطيفية (انظر جزء 27.8.3)

(3.92) المؤثرات الوحدوية تسمح للانعكاس، أي أن $U^{\dagger}\left(U|u\rangle\right) = I|u\rangle = |u\rangle$

المصفوفات الوحدوية تحفظ الضرب الداخلي:

$$\left(U|u\rangle, U|v\rangle\right) = \left(|u\rangle, |v\rangle\right) = \langle u|v\rangle \tag{3.93}$$

المصفوفات الوحدوية تحفظ المعيار

$$\left\|U|u\rangle\right\| = \left\||u\rangle\right\| \tag{3.94}$$

إذا كان لدينا مجموعة من الأساسات العمودية-المعايرة $\{|u_i\rangle\}$، $\{U|u_i\rangle\} = \{|v_i\rangle\}$ هي أيضاً أساسات عمودية-معايرة بحيث:

$$U = \sum_i |v_i\rangle\langle u_i| \qquad (3.95)$$

(3.96) للمصفوفات الوحدوية قيم مميزة بمعامل مقداره 1.

(3.97) إذا كان $\forall|u\rangle \quad 0 < \left(|u\rangle, A|u\rangle\right)$ في V (جميع القيم المميزة الموجبة).

3-5-20 المؤثرات الهيرميتية Hermitian و الموجبة

للمصفوفة الهيرميتية Hermitian الخاصية:

$$A = A^{\dagger} \qquad (3.98)$$

القيم المميزة للمصفوفة الهيرميتية تكون أعداداً حقيقية، وتكون المصفوفات الهيرميتية عمودية (على الرغم من أن ليس جميع المصفوفات العمودية تحتاج قيم مميزة حقيقية).

مثال(3-34): المصفوفة X هيرميتية لأن:

$$X^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

خصائص:

- $A = B + iC$ يمكن أن تمثل أي مؤثر إذا كان كل من B و C هيرميتياً، وفي حالة كون $C = 0$ إذا كان A نفسه هيرميتياً.
- إذا كان A هيرميتياً، عندها ل$\left(|u\rangle\right)$: $\langle u|A|u\rangle \in \mathbb{R}$ و

$$\langle u | Au\rangle \geq 0$$

- إذا كان A موجباً، فإن القيم المميزة له لن تكون سالبة.

3-5-21 المصفوفة القطرية Diagonalizable Matrix

المؤثر A يكون قطرياً إذا:

$$A = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i| \tag{3.99}$$

تكوّن المتجهات $|u_i\rangle$ مجموعة من متجهات مميزة العمودية-المعيرة ل(A)، التي لها قيم مميزة λ_i . هذا مماثل لقولنا أن A يمكن أن تحوّل إلى:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

مثال(3-35): تمثيل المؤثر X :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

المتجهان المميزان المعيّران ل(X) هما:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \qquad\qquad {}_2\ 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

المتجهان متعامدان (القيمتان المميزتان لهما 1- و 1)

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 0 + 0 - 1]$$

$$= 0$$

لذا؛ تكون X قطرية و تعطى بالعلاقة:

$$X = \frac{1}{2}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]\left[\langle 0| + \langle 1|\right] - \frac{1}{2}\left[|0\rangle - |1\rangle\right]\left[\langle 0| - \langle 1|\right]$$

و مفكوكها:

$$\frac{1}{2}\left(\left[\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle\right]\right) - \frac{1}{2}\left(\left[\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle\right]\right)$$

3-5-22 التبادلي Commutator و اللاتبادلي Anti-Commutator

هنا مجموعة من الخصائص للمؤثرات التبادلية و اللاتبادلية المتعلقة بالعلاقات التبادلية بين المؤثرين A و B.

تبادلي:

$[A,B] = AB - BA$ A و B تبادليان $(AB = BA)$ إذا $[A,B] = 0$ (3.100)

لا تبادلي:

$\{A,B\} = AB + BA$ نقول أن كل من A و B لا تبادلي إذا $\{A,B\} = 0$ (3.101)

مثال(3-36): نختبر كون X و Z تبادليين:

$$[X,Z] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\neq 0$$

لذا؛ فإن X و Z لا تبادليان.

النظرية القطرية الآنية simultaneous diagonalisation theorem

تنص على أنه إذا كان كل من H_A و H_B هيرميتياً، $[H_A, H_B] = 0$ إذا وجدت مجموعة من المتجهات المميزة عمودية-معايرة لكلا H_A و H_B لذا:

$$H_A = \sum_i \lambda_i' |i\rangle\langle i| \quad \text{و} \quad H_B = \sum_i \lambda_i'' |i\rangle\langle i| \qquad (3.102)$$

أي: كلاهما قطري في أساس مشترك.

خصائص:

$$AB = \frac{[A,B] + \{A,B\}}{2} \qquad (3.103)$$

$$[A,B]^{\dagger} = [A^{\dagger}, B^{\dagger}] \quad (3.104)$$

$$[A,B] = -[B,A] \quad (3.105)$$

$[H_A, H_B]$ هيرميتية إذا كان كل من H_A و H_B هيرميتياً (3.106)

3-5-23 التجزيء القطبي Polar Decomposition

التجزيء القطبي مفاده: أن أي مؤثر خطي A يمكن تمثيله كما يلي:
$A = U\sqrt{A^{\dagger}A}$ (يسمى: التجزيء القطبي اليساري the left polar decomposition) و $\sqrt{AA^{\dagger}}U$ (و يسمى: التجزيء القطبي اليميني the right polar decomposition)، حيث U هو مؤثر وحدوي.

تجزيء القيمة الفريدة (Single value decomposition) تقول: انه أي مؤثر خطي A يكون مصفوفة مربعة (أي: لمدخلاتها و مخرجاتها الأبعاد ذاتها) عندئذٍ يوجد مؤثرات وحدوية U_A و U_B، و D مصفوفة قطرية عناصرها غير سالبة في $\mathbb{R}$ بحيث: $A = U_A D U_B$.

3-5-24 التجزيء الطيفي Spectral Decomposition

يكون المؤثر الخطي عمودياً $(A^{\dagger}A = AA^{\dagger})$ لذا و فقط إذا كان له متجهات مميزة عمودية ونسخاً معدلة معيرة $\{u_i\}$ للمتجهات المميزة التي تجعل المؤثر قطرياً:

$$A = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i| \quad (3.107)$$

مثال(3-37): التجزيء الطيفي لكل من X و Z.

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|$$

ل(X) متجهات مميزة $|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+|1\rangle$ و $|-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle-|1\rangle$ ، و قيم مميزة 1+ و

$$|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

خصائص:

(3.108) $A=UDU^{1}$ حيث: Uمؤثر وحدوي و D مؤثر قطري.

(3.109) إذا كان Aعمودياً، عندها يكون تجزيئه الطيفي: $\sum_a |a\rangle\langle a|$.

3-5-25 الضرب الممتد Tensor Products

في الضرب الممتد نقوم بعمل اتحاد بين فضائي متجهين صغيرين لتكوين فضاء متجه أكبر. تتحد عناصر فضائي المتجهين الصغيرين محافظةً على الضرب القياسي scalar multiplication و الخطية linearity، بشكل رسمي:

إذا كان $\{|u\rangle\}$ و $\{|v\rangle\}$ أساسين لV و W بالترتيب، حينئذٍ: $\{|u\rangle\otimes|v\rangle\}$ تكوّن أساساً $V\otimes W$. نستطيع كتابتها بالطريقة التالية:

$$|u\rangle\otimes|v\rangle=|u\rangle|v\rangle=|u,v\rangle=|uv\rangle \qquad (3.110)$$

مثال(3-38): ضرب ممتد بسيط.

$$|1\rangle\otimes|0\rangle=|1\rangle|0\rangle=|1,0\rangle=|10\rangle$$

يعرف ضرب كرونيكر Kronecker product كما يلي:

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} x & y \\ v & w \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot B & b\cdot B \\ c\cdot B & d\cdot B \end{bmatrix} \qquad (3.112)$$

$$=\begin{bmatrix} ax & ay & bx & by \\ av & aw & bv & bw \\ cx & cy & dx & dy \\ cv & cw & dv & dw \end{bmatrix}$$

حيث A و B هي: مؤثرات خطية.

مثال(3-39): إجراء ضرب كرونيكر على مصفوفتي باولي X و Y.

$$Y=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X\otimes Y=\begin{bmatrix} 0\cdot Y & 1\cdot Y \\ 1\cdot Y & 0\cdot Y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خصائص:

الضرب الممتد متعلق بالضرب الداخلي:

$$(|uv\rangle,|u'v'\rangle)=(|u\rangle,|u'\rangle)(|v\rangle,|v'\rangle) \qquad (3.114)$$

$$=\langle u|u'\rangle\langle v|v'\rangle \qquad (3.115)$$

$$|u\rangle^{\otimes k} = (|u\rangle \otimes \ldots \otimes |u\rangle)_k \quad \text{(k من المرات)} \qquad (3.116)$$

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* \qquad (3.117)$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \qquad (3.118)$$

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \qquad (3.119)$$

$$|ab\rangle^\dagger = \langle ab| \qquad (3.120)$$

$$\alpha(|u,v\rangle) = |\alpha u, v\rangle = |u, \alpha v\rangle \qquad (3.121)$$

$$|u_1 + u_2, v\rangle = |u_1, v\rangle + |u_2, v\rangle \qquad (3.122)$$

$$|u, v_1 + v_2\rangle = |u, v_1\rangle + |u, v_2\rangle \qquad (3.123)$$

$$|uv\rangle \neq |vu\rangle \qquad (3.124)$$

(3125) للمؤثرين الخطيين A و B $A \otimes B(|uv\rangle) = A|u\rangle \otimes A|v\rangle$

(3.126) للمؤثرين العموديين N_A و N_B : $N_A \otimes N_B$ سيكون عمودياً.

(3.127) للمؤثرين الهيرميتيين H_A و H_B : $H_A \otimes H_B$ سيكون هيرميتياً.

(3.128) للمؤثرين الوحدويين U_A و U_B : $U_A \otimes U_B$ سيكون وحدويا.

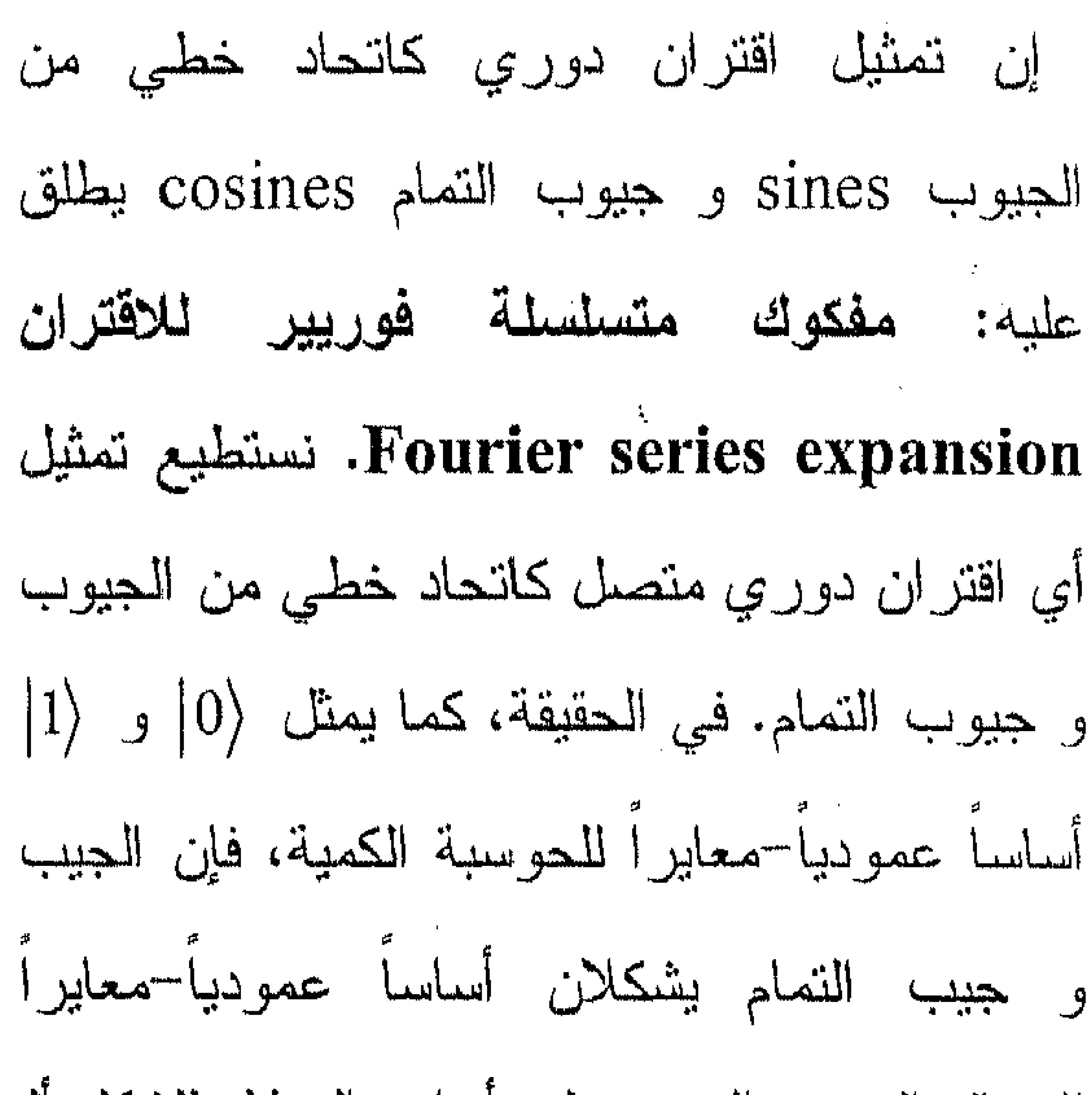
(3.129) للمؤثرين الموجبين P_A و P_B : $P_A \otimes P_B$ سيكون موجباً.

6-3 تحويلات فورييـر Fourier Transforms

تحويلات فورييـر_المسماة باسم جان باتيست جوزيف فورييـر Jean Baptiste Joseph Fourier، (1768 -1830) الشكل(3-9) تحول البيانات من المجال الزمني time domain إلى المجال الترددي frequency domain. تحويل فورييـر المنفصل discrete Fourier transform (DFT) هي نسخة معدلة من تحويل فورييـر و التي تختلف عن تحويل فورييـر الأساسي؛ حيث لا تشمل حساب التفاضل و التكامل و التي يمكن إنجازها على

الحاسبات مباشرةً، و لكنها محدودة للاقترانات الدورية periodic functions. إن تحويل فوريير ليس محدوداً بذاته على الاقترانات الدورية.

3-6-1 متسلسلة فوريير The Fourier Series



إن تمثيل اقتران دوري كاتحاد خطي من الجيوب sines و جيوب التمام cosines يطلق عليه: **مفكوك متسلسلة فوريير للاقتران Fourier series expansion**. نستطيع تمثيل أي اقتران دوري متصل كاتحاد خطي من الجيوب و جيوب التمام. في الحقيقة، كما يمثل $|0\rangle$ و $|1\rangle$ أساساً عمودياً-معايراً للحوسبة الكمية، فإن الجيب و جيب التمام يشكلان أساساً عمودياً-معايراً للمجال الزمني المبني على أساس التمثيل للشكل ألموجي .



الشكل(3-9): جان باتيست جوزيف فوريير

إحدى الطرق لوصف الأساس العمودي-المعير الذي نقوم بالقياس تجاهه.

لمتسلسلة فوريير الشكل التالي:

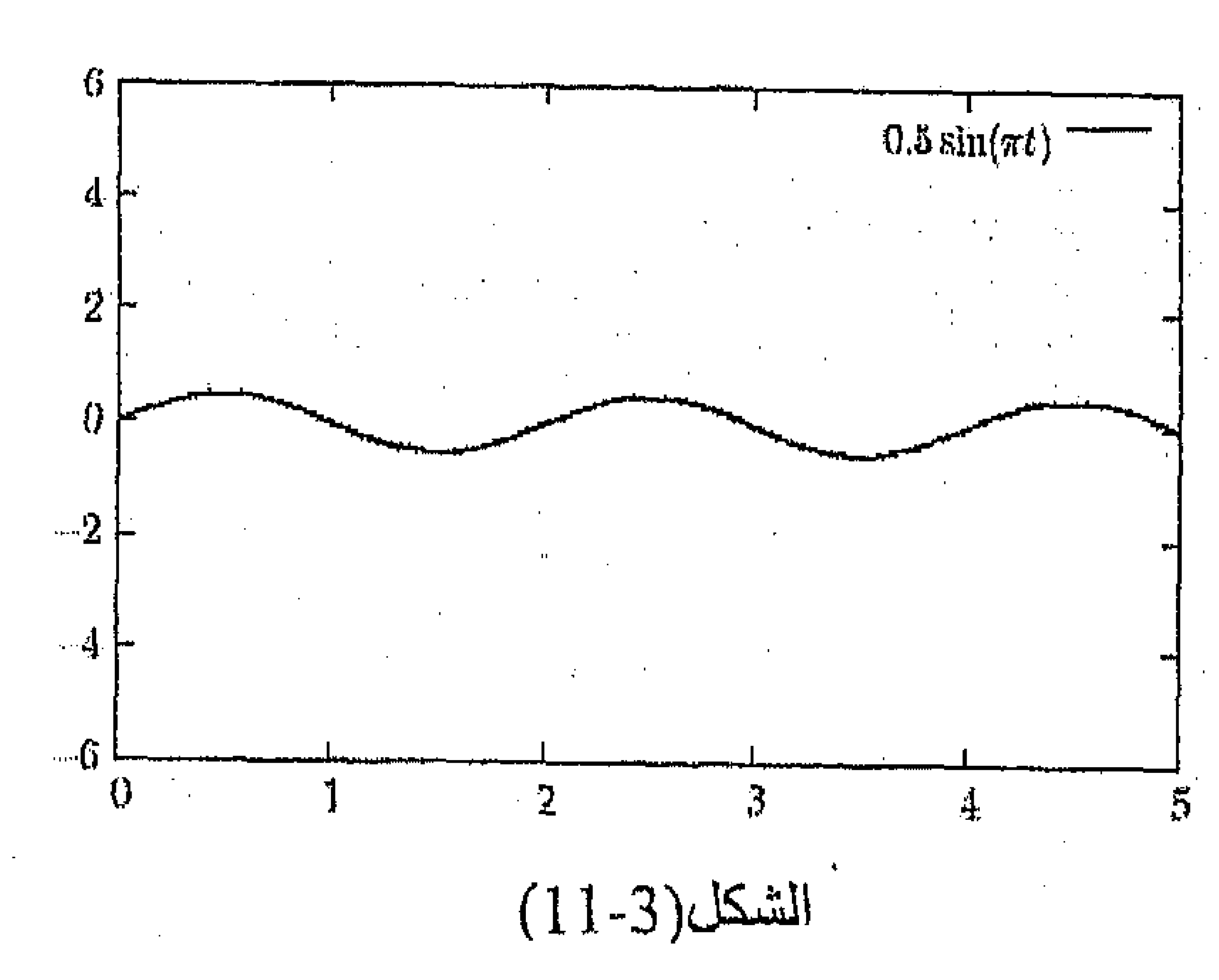
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos(nt) \qquad (3.130)$$

لذا؛ إذا كان لدينا شكلاً موجيا و نريد أن نصوره، علينا فقط إيجاد المعاملات: $a_n,\ldots,a_1,a_0$ و $b_n,\ldots,b_1,b_0$ و كذلك عدد الجيوب و جيوب التمام. لن نخوض هنا في اشتقاق هذه المعاملات (أو كيفية إيجاد عدد الجيوب و جيوب التمام). سيكون التعريف كافياً طالما أن القصد أن تكون هذه مقدمة موجزة لمتسلسلة فوريير. فمثلاً: افترض أننا أوجدنا : $a_1=0.5$ و $a_4=2$ و $b_2=4$ و جميع ما تبقى مساوٍ 0، عندئذٍ تكون متسلسلة فوريير:

$$f(t)=0.5\sin(\pi t)+2\sin(4\pi t)+4\cos(2\pi t)$$

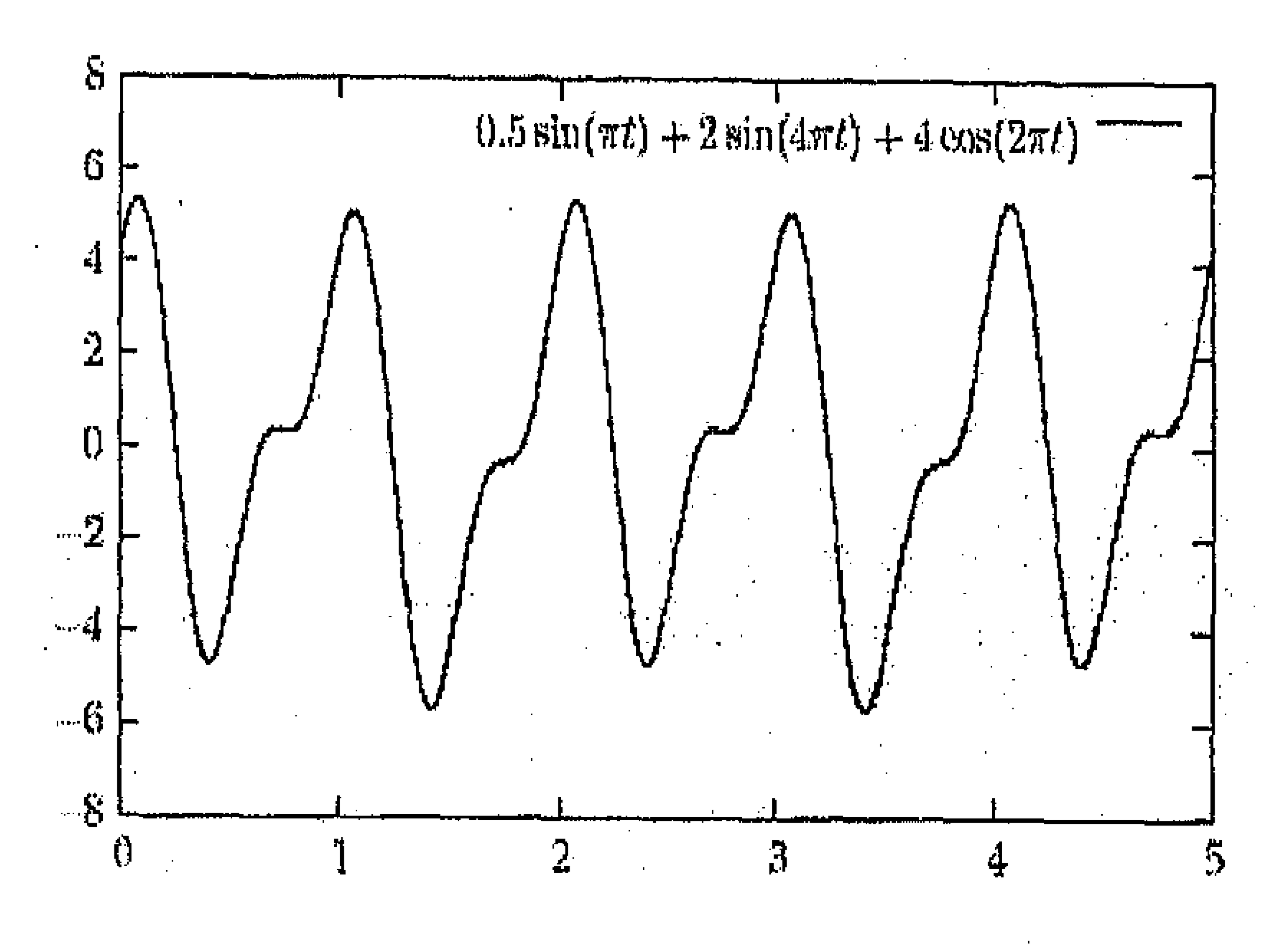
الممثلة بالرسم البياني الموضح في الشكل(3−10):

الاقتران f(t) مكون من الأشكال الموجية التالية:
$0.5\sin(\pi t), 2\sin(4\pi t), 4\cos(2\pi t)$
. مجدداً من المفيد رؤيتها ممثلة بيانياً وذلك موضح في الشكلين(3−11) و (3−12).



الشكل(3-11)

إذا قمنا بتحليل الترددات و النطاقات لمركبات f(t) نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:



الشكل(3-10)

نستطيع أيضاً إعادة كتابة الاقترانات الجيبية أعلاه كمجموع للأعداد المركبة بالصيغة الأسية.

الشكل الموجي	نطاق الجيب	نطاق جيب التمام	التردد
$0.5\sin(\pi t)$	$\frac{1}{2}$	0	2
$2\sin(4\pi t)$	2	0	$\frac{1}{2}$
$4\cos(2\pi t)$	0	4	1

3-6-2 تحويل فوريير المنفصل **The Discrete Fourier Transform**

(DFT) يحوّل من متتالية منفصلة دورية إلى مجموعة من المعاملات التي تمثل الترددات للمتتالية المنفصلة. يتخذ DFT، كمدخلات و مخرجات، مصفوفة بأعداد مركبة. عدد

العناصر في المصفوفة محكوم بمعدل اختبار العينة (sampling rate) و طول الشكل ألموجي. بشكل رسمي؛ إن N من الأعداد المركبة $t_0,\ldots,t_{N-1}$ تتحول إلى N من الأعداد المركبة $f_0,\ldots,f_{N-1}$ بناءً على الصيغة التالية:

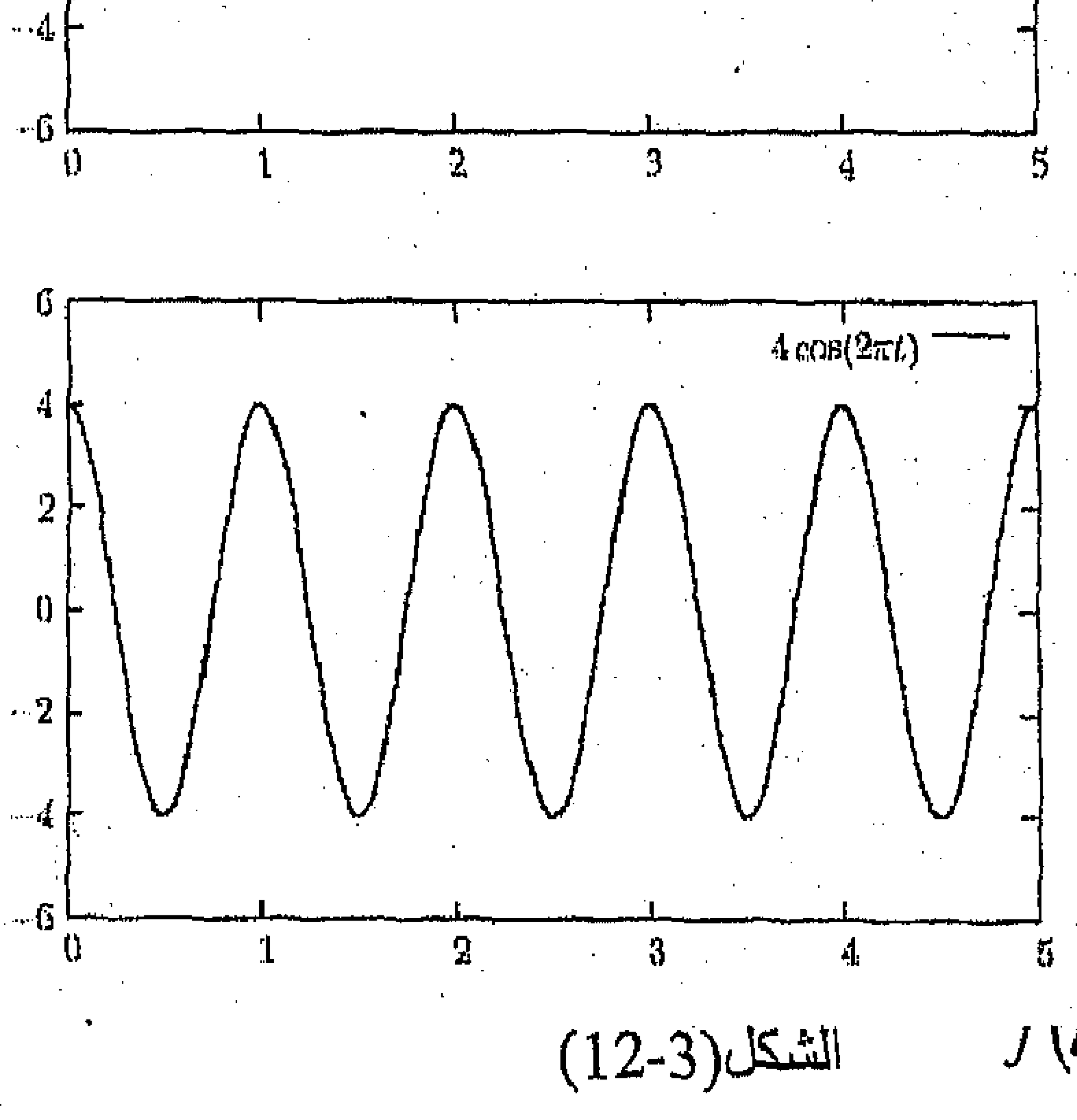
$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} t_k e^{-\frac{2\pi i}{N}jk} \qquad j = 0,\ldots,N-1 \qquad (3.131)$$

إن DFT هي مؤثر خطي له تمثيل مصفوفة قابلة للعكس، لذا نستطيع إعادة التحويل إلى شكله الأصلي باستخدام:

$$t_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi i}{N}kj}$$

$$k = 0,\ldots,N-1 \qquad (3.132)$$

قمنا بتمثيل اقتراننا الدوري كمتتالية من الجيوب و جيوب التمام، وحتى نتمكن من استخدام الصيغ أعلاه يجب التحويل إلى الشكل ألأسي المركب. ولأن المتتالية التي نتابعها منفصلة نحتاج لتعيين نقاط متعددة على طول المتتالية. يحدد معدل اختبار العينة N دقة تحويلنا باستخدام الحد الأدنى لمعدل اختبار العينة الذي يتم إيجاده بتطبيق نظرية نيكويست Nyquist's theorem.



الشكل(3-12)

لنلق نظرة على تطبيق (DFT) على:

$$f(t) = 0.5\sin(\pi t) + 2\sin(4\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

، و لنقم بضبط معدل اختبار العينة حتى

نحصل على شكل موجي مقبول في مجال التردد:

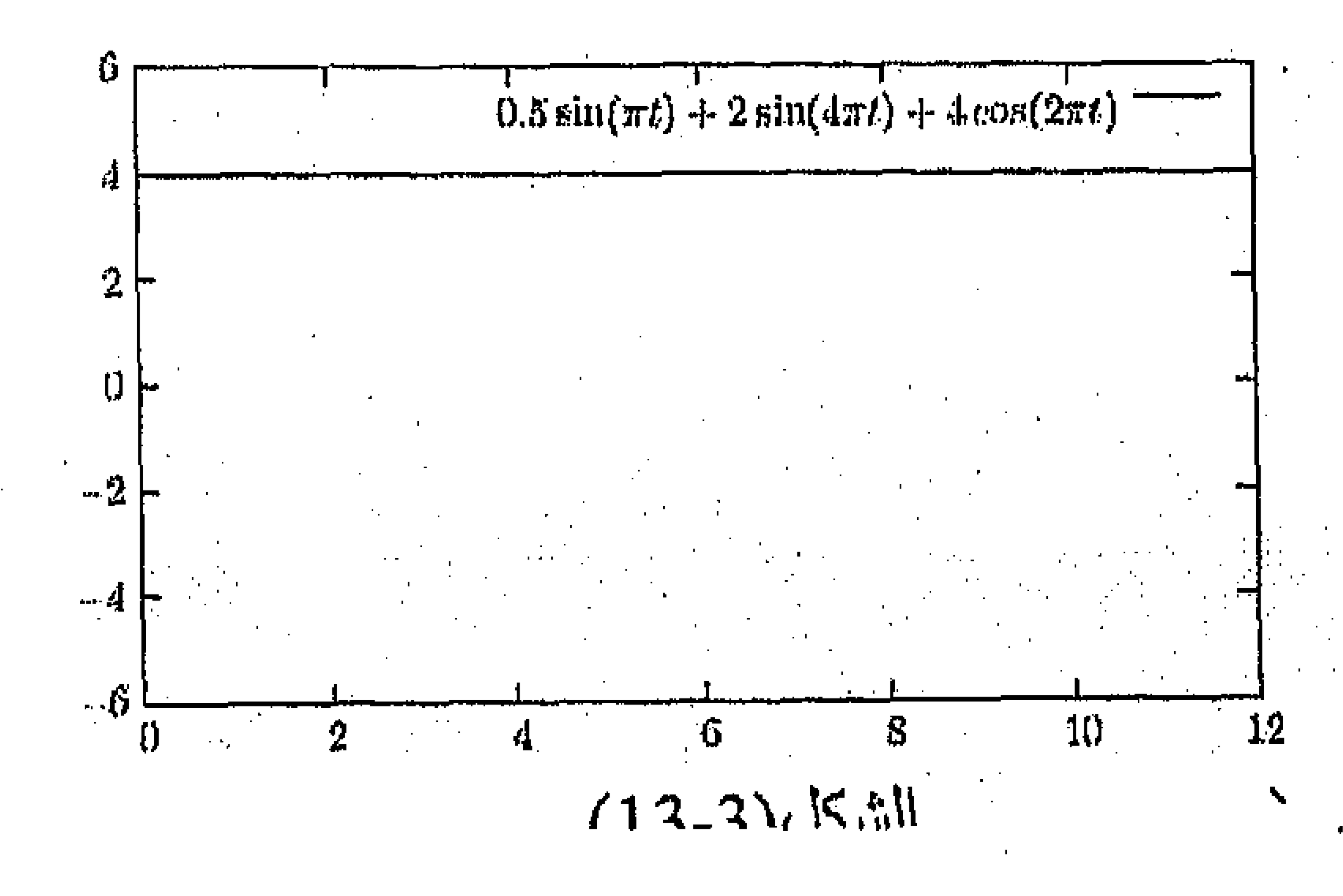
الرسم البياني المبين في الشكل(3−13) ما هو إلا:

$$f(t) = 0.5\sin(\pi t) + 2\sin(4\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

بنقاط اختبار للعينة على كامل الأعداد $(N,\ldots,2,1)$، و كما ترى؛ إذا قمنا باختبار العينة في هذه النقطة فقط فلن تكون لدينا فكرة عن الموجة نهائياً.

بدل أن نقوم بضبط معدل العينة جزئياً، سنقوم بضبط الاقتران بشكل طفيف. ما نقوم به فقط هو جعل محور السينات (x-axis) أطول، لكن مع الحفاظ على موجتنا. الاقتران الآن يبدو بهذا الشكل(انظر للشكل(3−14)):

$$f(t) = 0.5\sin\left(\pi\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(4\pi\frac{t}{2}\right) + 4\cos\left(2\pi\frac{t}{2}\right)$$



الشكل(3−13)

لذا؛ بفاعلية نقوم باختبار العينة بضعفي المعدل.

نشاهد في الأسفل معدل اختبار العينة 50 ضعف المعدل الأصلي، و يبدو شكل موجتنا جيداً. الاقتران يبدو الآن هكذا:

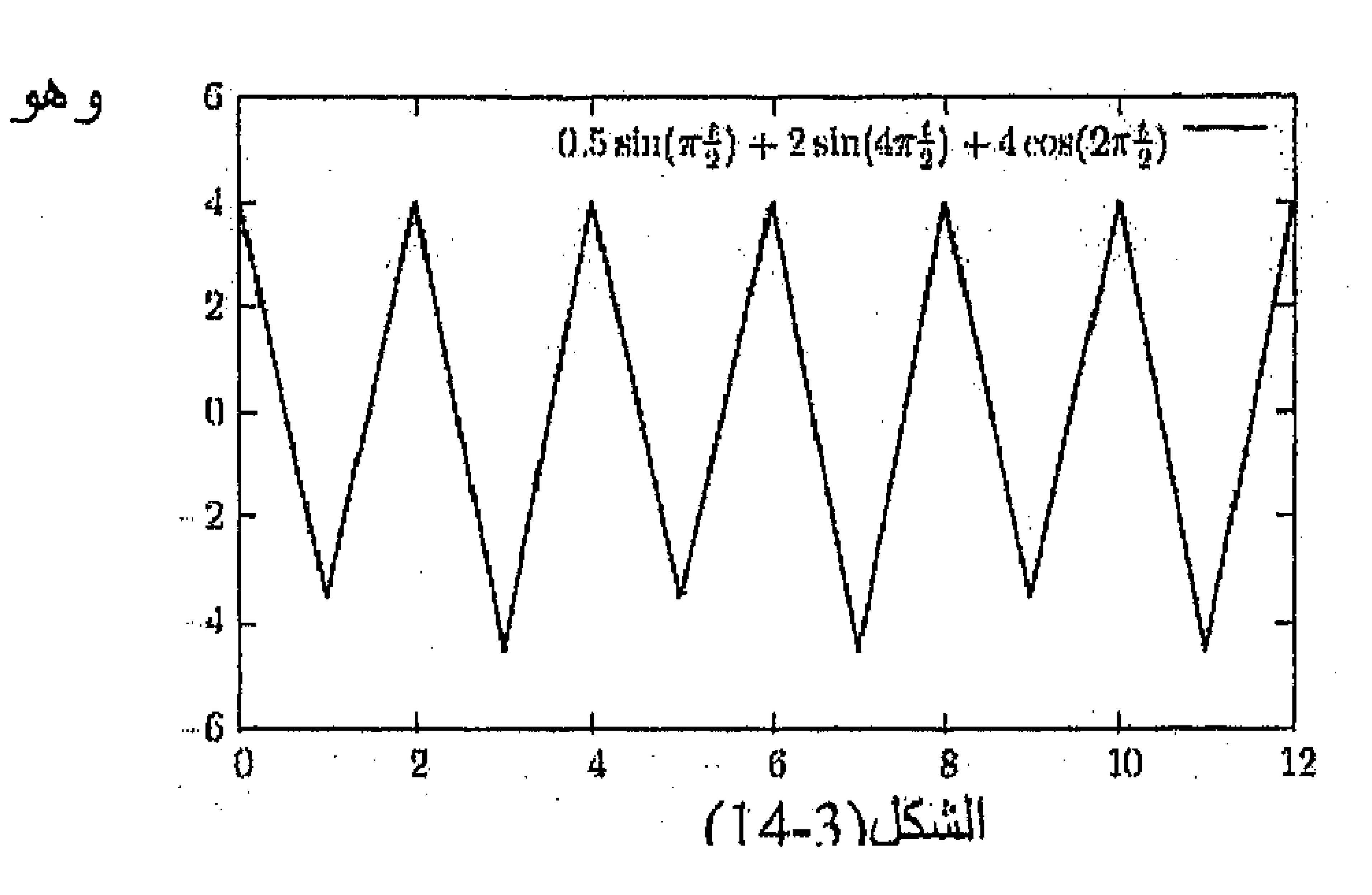
$$f(t) = 0.5\sin\left(\pi\frac{t}{50}\right) + 2\sin\left(4\pi\frac{t}{50}\right) + 4\cos\left(2\pi\frac{t}{50}\right)$$

الذي يوضحه الشكل(3−15).

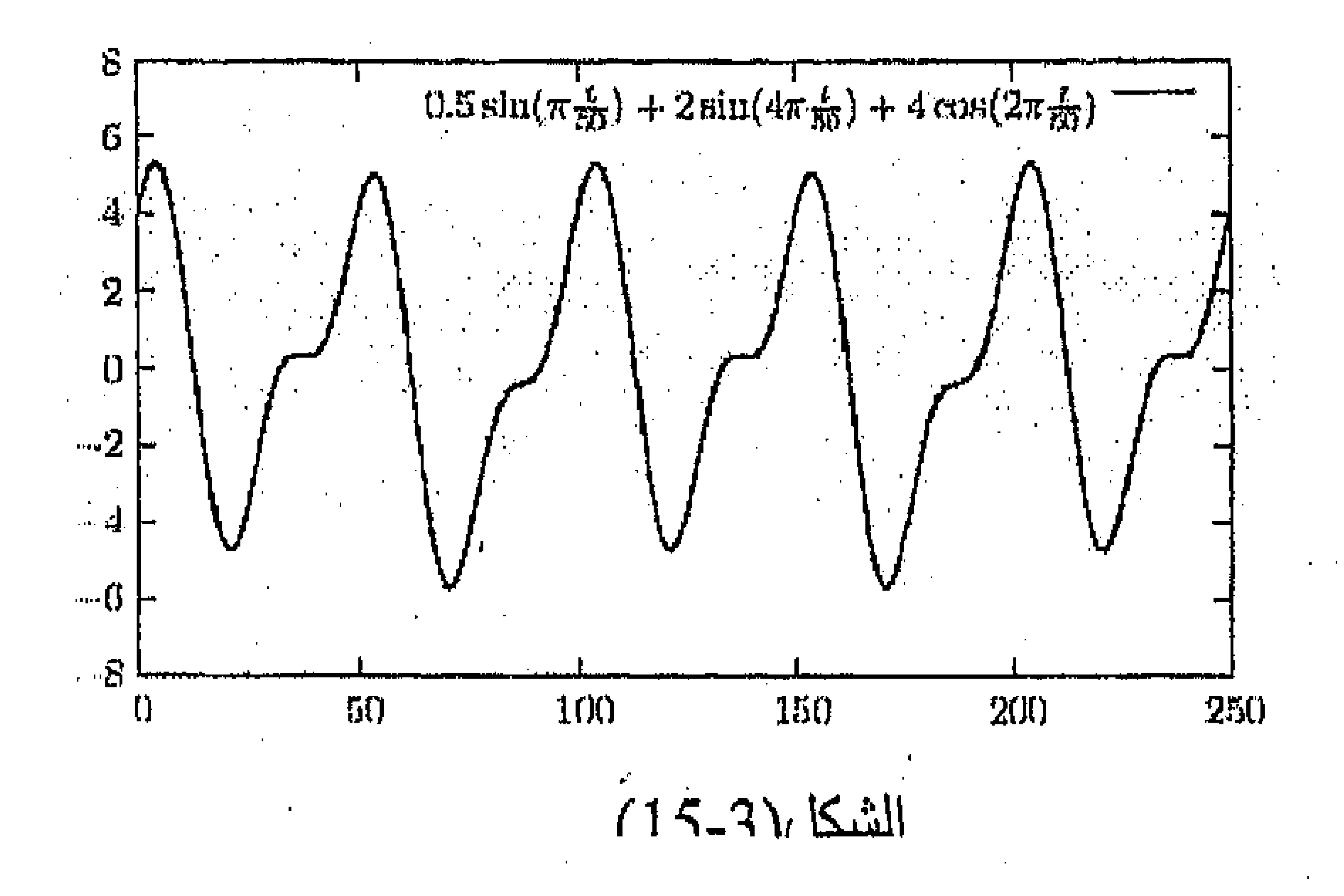
أخيراً، هنا $f(t) = 0.5\sin\left(\pi\frac{t}{50}\right) + 2\sin\left(4\pi\frac{t}{50}\right) + 4\cos\left(2\pi\frac{t}{50}\right)$ بعد إنجازها بـ(DFT)،

الاقتران الآن في مجال التردد وهو موضح في الشكل(3-16).

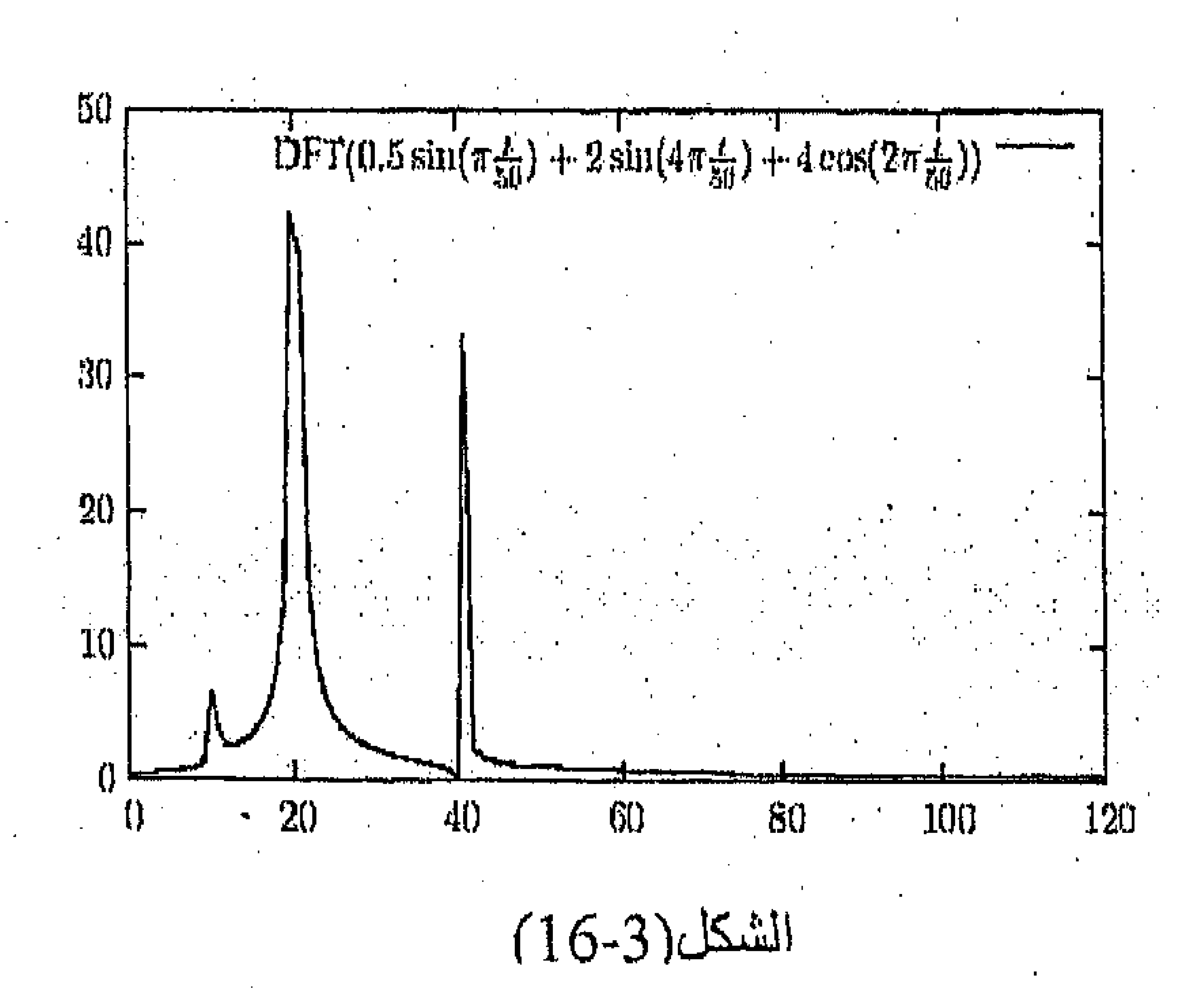
لاحقاً؛ في فصل 7 ، سنرى كيف أن الموافق الكمي ل(DFT) (المسمى: تحويل فوريير الكمي quantum Fourier transform) يمكن استخدامه للحوسبة الكمية.



الشكل(3-14)



الشكل(3-15)



الشكل(3-16)

الفصل الرابع
الحوسبـــــة الكميـــــــة Quantum Computing

4-1 مقدمة Introduction

بشكل عام سنفكر بالحاسب الكمي كحاسب كلاسيكي مرفقة معه دارات كمية بنوع مــن الموائمة بين الدارات المنطقية المألوفة و الدارات المنطقية الكمية. و بما أن القليل من الأشياء التي يستطيع الحاسب الكمي أن ينجزها بشكل أفضل من الحاسب الكلاسيكي فان ذلك يجعل من المنطقي أن تكون غالبية المعالجة تحدث في الماكينة الكلاسيكية.

4-2 نبذة تاريخية History

في عام 1982 وضع ريتشارد فاينمـــان Richard Feynman نظريـــة مفادهـــا أن الحوسبة الكلاسيكية يمكن أن تحسّن بشكل مثير بواسطة التأثيرات الكمية. و بناءً على هـــذا؛ قام ديفيد ديوتش David Deutsch بتطوير الأساس للحوسبة الكميـــة بـــين عـــامي 1984 و1985. أما الاقتحام التالي الرئيسي فقد أتى في عام 1994 عندما قام بيتـــر شـــور Peter Shor بوصف طريقة لتحليل أعداد كبيرة إلى عواملها في متعدد-زمن كمي (والـــذي كـــسر تـــضمين RSA encryption RSA) أصـــبحت تُعـــرف بخوارزميـــة شـــور Shor's algorithm. إبان هذه الفتـــرة تطـــورت أصـــناف التعقيـــد الكمـــي quantum classes complexity ووصفت آلة تورينج الكمية quantum Turing machine. وفي عام 1996 طور لف غروفر Lov Grover خوارزميـــة قاعـــدة بيانـــات بحـــث database search algorithm سريعة تعرف بخوارزمية غروفر Grover's algorithm. أيضاً تم بنـــاء أول النماذج الأولية للحاسب الكمي في عام 1996. في عام 1997 تم تطوير تقنيـــات تـــصحيح الأخطاء الكمية في مختبرات بيل و إي بي إم Bell labs and IBM.

تم تحسين الأدوات الفيزيائية للحاسبات الكمية باستخدام آلة الكيوبتات الثلاث three qubit machine عام 1999 و آلة الكيوبتات السبع seven qubit machine في عام 2000.

3-4 البتات و الكيوبتات Bits and Qubits

هذا الجزء يتحدث عن "البراغي و الصواميل" للحاسب الكمي؛ إذ يصف الكيوبتاتqubits و البوابات gates و الدارات circuits.

تؤدي الحاسبات الكمية عمليات على الكيوبتات وهي المناظرة للبتات الاعتيادية، لكن لها خاصية إضافية وهي أنها يمكن أن تكون في حالة تراكب superposition. يستطيع المسجل الكمي quantum register ذو الثلاثة كيوبتات أن يخزن 8 أعداد بتراكب متزامن. و المسجل ذو 250 كيوبت يستطيع حمل أعداد (متراكبة) تفوق عدد الذرات في الكون.

كمية المعلومات التي تخزن أثناء "الطور الحاسبي"computational phase لانهائية أساسا لكننا لا نستطيع الوصول إليها. إن صعوبة الحصول على المعلومات متعلقة بالقياس الكمي؛ إذ عند محاولتنا قراءة حالة متراكبة و التي تحمل قيماً متعددة فإن الحالة تتحطم فنحصل على قيمة واحدة فقط فيما تضيع القيم الأخرى. وهذا مزعج ولكن في بعض الحالات ممكن جعله يعمل لمصلحتنا الحاسبية.

1-3-4 الكيوبتات المفردة Single Qubits

تستخدم الحاسبات الكلاسيكية حالتين محددتين (مثل حالات شحن مواسع capacitor) لتمثيل وحدة من المعلومات، هذه الحالة تسمى رقماً ثنائياً binary digit (أو اختصاراً بت bit) وللبت القيمتين التاليتين:

0 و 1

ولا توجد حالة وسطية بينهما؛ أي أن قيمة البت لا يمكن أن تكون تراكبا منهما. الكيوبتات qubits أو البتات الكمية quantum bits، من ناحية أخرى؛ يمكن أن تكون في حالة بين 0 و 1 ، لكن ذلك يكون أثناء الطور الحاسبي للعملية الكمية فقط. عندما تقاس يصبح الكيوبت إما

$|0\rangle$ أو $|1\rangle$

أي إما 0 أو 1. أن هذا يطابق قولنا أن الجسيم ذا البرم spin يمكن أن يكون في حالة متراكبة، و لكن حين يتم القياس تظهر قيمة واحدة فقط.

بشكل عام تمثل حالة الكيوبت أثناء الطور الحاسبي باتحاد خطي من حالات أخرى تسمى الواحدة منها حالة التراكب.

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

α و β هنا هما: سعتا الاحتمال probability amplitudes، و يستخدمان لحساب الاحتمالات للنظام عندما يقفز إلى $\langle 0|$ أو $\langle 1|$ عقب عملية قياس أو عملية قراءة. ممكن أن يكون، لنقل 25% فرصة لقياس 0 و 75% فرصة لقياس 1. مجموع النسب المئوية يجب أن يكون 100%. يجب أن تحقق الكيوبتات_بلغة تمثيلها_ الشرط:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad (4.1)$$

هذه المعادلة مكافئة لقولنا إن مجموع الاحتمالات يساوي 100%.

حالما يتم قياس الكيوبت فانه يبقى في تلك الحالة إذا ما أعيد نفس القياس شريطة أن يظل النظام مغلقاً بين القياسين. إن احتمالات حالة الكيوبت تلك_حين تتراكب_ لأن تكون في إحدى الحالتين $\langle 0|$ أو $\langle 1|$ هي:

$|\alpha|^2$ للحالة $|0\rangle$

و $|\beta|^2$ للحالة $|1\rangle$

$\langle 0|$ و $\langle 1|$ حقيقةً هما متجهان vectors، يسميان حالتي الأساس الحوسبي computational basis states والتي تشكل أساسات عمودية معايرة لفضاء المتجه $\mathbb{C}^2$.

يصف متجه الحالة $\langle \Psi|$ الحالة لنظام كمي في أي نقطة في زمن النظام الكلي. متجه الحالة في حالة وجود كيوبت واحد هو:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad (4.2)$$

α و β ممكن أن يتغيرا مع الزمن حال تطور الحالة أثناء الحوسبة، لكن مجموع مربعيّ α و β يجب أن يكون دائماً مساوياً للعدد 1.

تستخدم الحوسبة الكمية أيضا $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$ بشكل شـائع كأسـاس لـ($\mathbb{C}^2$) والذي يختصر غالباً إلى $|+\rangle$ و $|-\rangle$. هذه الأسس في بعض الأحيان تمثل بأسـهم كالموصوفة بالأسفل، و يشار لها كخط مستقيم أو خط قطري كتلك التي تشير إلى اسـتقطاب الفوتون. يمكن أن تجد هذه الصيغ الاصطلاحية المستخدمة كالتالي:

$$|0\rangle = |\rightarrow\rangle \tag{4.3}$$

$$|1\rangle = |\uparrow\rangle \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = |\nearrow\rangle. \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle = |\nwarrow\rangle. \tag{4.6}$$

مثال(4-1): احتمالات القياس

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

احتمالية قياس $|0\rangle$ هي:

$$\left(\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right)^2 = \frac{1}{2}$$

احتمالية قياس $|1\rangle$ هي:

$$\left(\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right)^2 = \frac{1}{2}$$

50% $|0\rangle$ % $|1\rangle$

مثال(4-2): احتمالات قياس أكثر

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$$

احتمالية قياس 0 هي:

$$\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right)^2 = \frac{3}{4}$$

احتمالية قياس 1 هي:

$$\left(\left|\frac{1}{2}\right|\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$|1\rangle$ % $|0\rangle$ %

إن الإشارة في منتصف القيمتين يمكن أن تتغير مؤثرةً بذلك على التطور الداخلي للكيوبت و ليس على مخرج القياس. عندما يتم القياس بالأساس $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ تكون الإشارة حقيقة **هي الطور النسبي relative phase** للكيوبت؛ لذا فإن: $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ و $\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle$ لهما نفس القيمة الناتجة و نفس الاحتمال لكنهما تتصرفان بطريقة مختلفة أثناء التطور الحاسبي. رسميا نقول أنهما مختلفان بمعامل طور نسبي relative phase factor، وعليه؛ فإن حالتي الكيوبتين أعلاه تختلفان بمعامل طور يساوي (-1). و قد سمي معامل الطور بهذا الاسم لأن له قيمة تساوي 1 دائماً ، لذا تتحدد قيمته_كعدد مركب_كلياً بواسطة الطور.

النوع الآخر من الأطوار يسمى **الطور الشامل global phase**. يمكن لحالتين أن تختلفا بمعامل الطور الشامل وتظلان تعتبران متماثلتين، سيما و أن معامل الطور الشامل ليس ملحوظا observable. أحد أسباب هذا هو كون احتمالي الناتجين $|\alpha|$ و $|\beta|$ لا يتأثران إذا ما ضرب كل من α و β بنفس العدد المركب والمساوي 1. بطريقة مماثلة، لا يتأثر الطور النسبي (الذي يتشكل بتأثيرات التداخل) إذا ضرب α و β بمعامل طور مشترك؛ معنى هذا أنه إذا كان لدينا حالة بثمانية كيوبتات نستطيع أن نضع معاملاً مركباً أمام الحالة ككل لجعلها أكثر قابلية للقراءة، المثال الآتي يوضح ذلك.

مثال(4-3): الطور الشامل.

$$|\Psi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$|\Psi\rangle = -i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

تذكر أن: $-i\times -i = 1$. نقول أن المعامل أمام متجه الحالة التي لدينا $(-i)$ هو معامل الطور الشامل، ونستطيع القول كذلك أن لدينا طوراً مقداره $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ لان $-i = e^{-i\pi/2}$.

مثال(4-4): طور شامل آخر

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(-|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\right)$$

يمكن كتابتها:

$$|\Psi\rangle = (-1)\frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right)$$

4-3-2 الكيت $|\ \rangle$ The Ket

الكيت $|\ \rangle$ هي جزء من صيغة ديراك Dirac's notation، وهو مجرد صيغة للمتجه.

إن الحالة لكيوبت منفرد هي متجه وحدة في $\mathbb{C}^2$، لذا :

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

هو متجه ويكتب هكذا:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

بحيث:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

و

$$|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

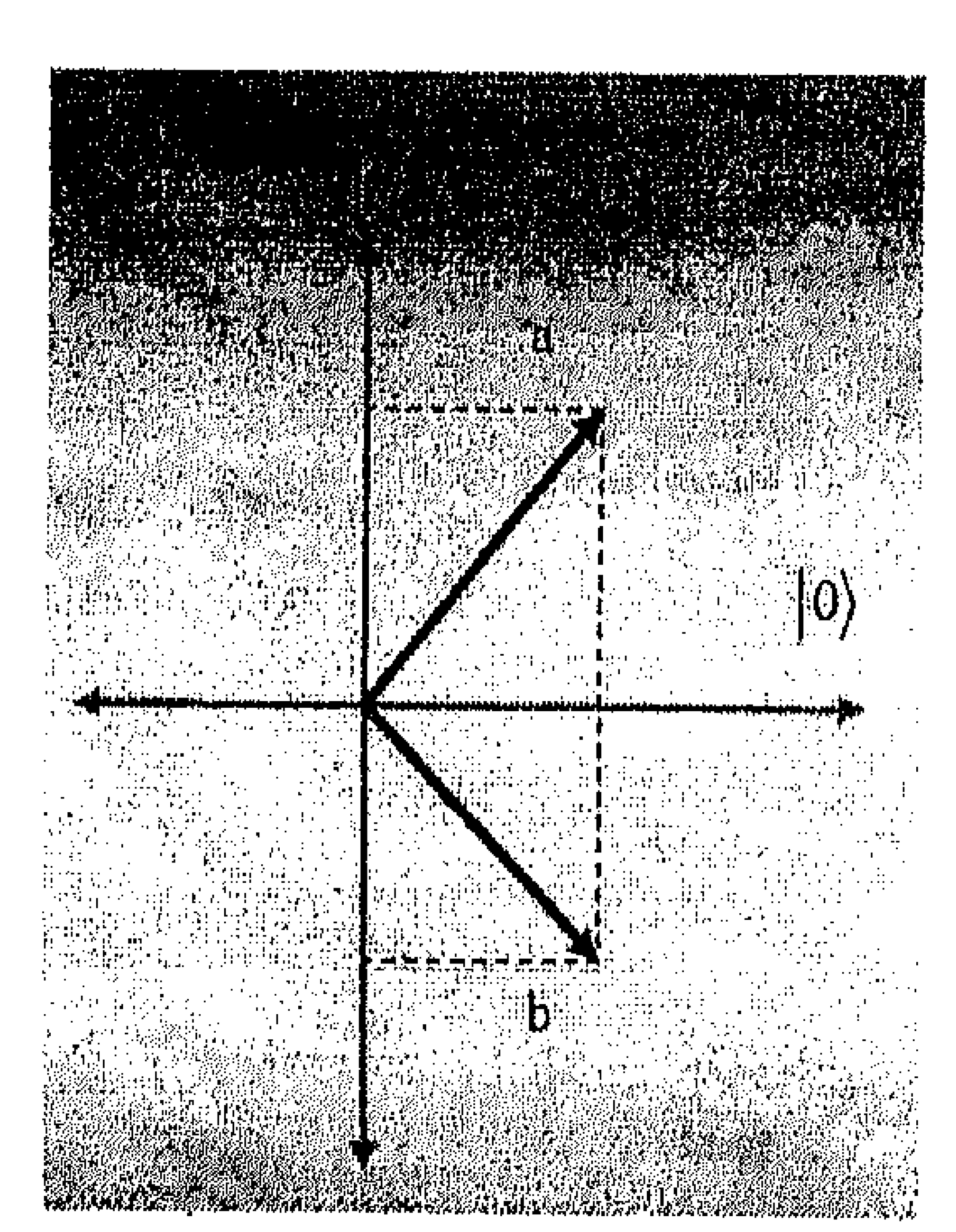
4-3-3 تصور كيوبت ثنائي الأبعاد

Two Dimensional Qubit Visualization

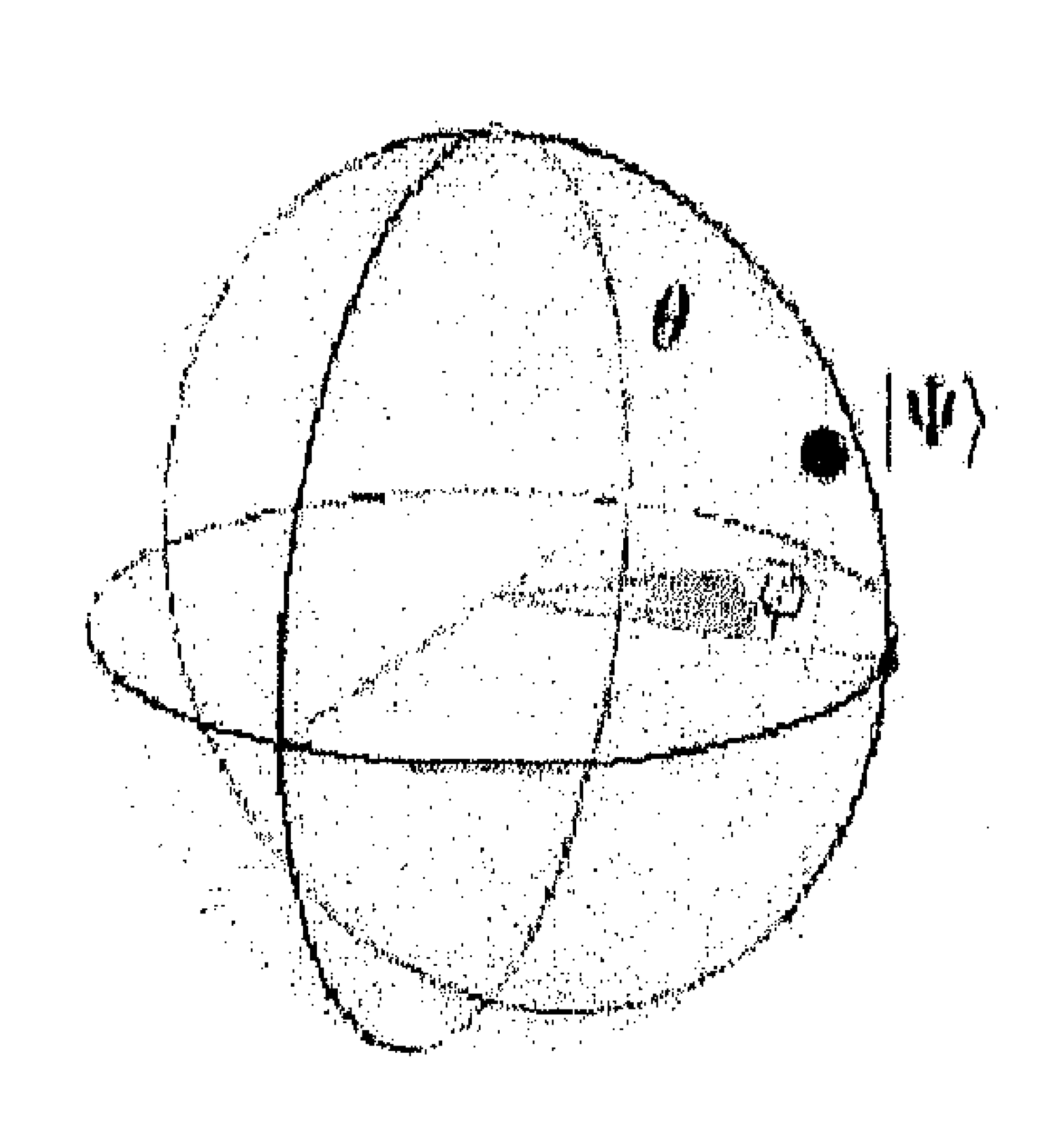
إن الكيوبتات المنفردة يمكن أن تمثل بقيمة و طور نسبي ذي بعدين بواسطة الرسم البياني الموضح في الشكل(4-1)، والذي يشبه الطريقة التي نمثل بها الإحداثيات القطبيـــة للأعــداد المركبة. الرسم يظهر الشكل العام لتمثيل كيوبت ثنائي الأبعاد، حيث:

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad \text{و} \quad b=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

هذا الرسم البياني معتمد لقيم α و β ذات الأعداد الصحيحة، لكنه لا يستطيع أن يصور بدقة كل الحالات المحتملة لكيوبت؛ لهذا نحتاج لأبعادٍ ثلاث.



الشكل(4-1): تمثيل كيوبت ثنائي



الشكل(4-2): كرة بلوخ ثلاثية

4-3-4 تصور كيوبت ثلاثي الأبعاد_كرة بلوخ

Three Dimensional Qubit Visulisation-The Bloch Sphere

كرة بلوخ هي أداة نستطيع بها معاينة حالة كيوبت منفرد بثلاثة أبعــاد، وهــي مفيــدة لتصوير جميع عمليات الكيوبت المنفرد. نستطيع القول أن حالة الكيوبت المنفرد يمكن كتابتها على الشكل:

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \qquad (4.9)$$

يمكننا تجاهل معامل الطور الشامل الموجود في الأمام، لذا تصبح $|\Psi\rangle$:

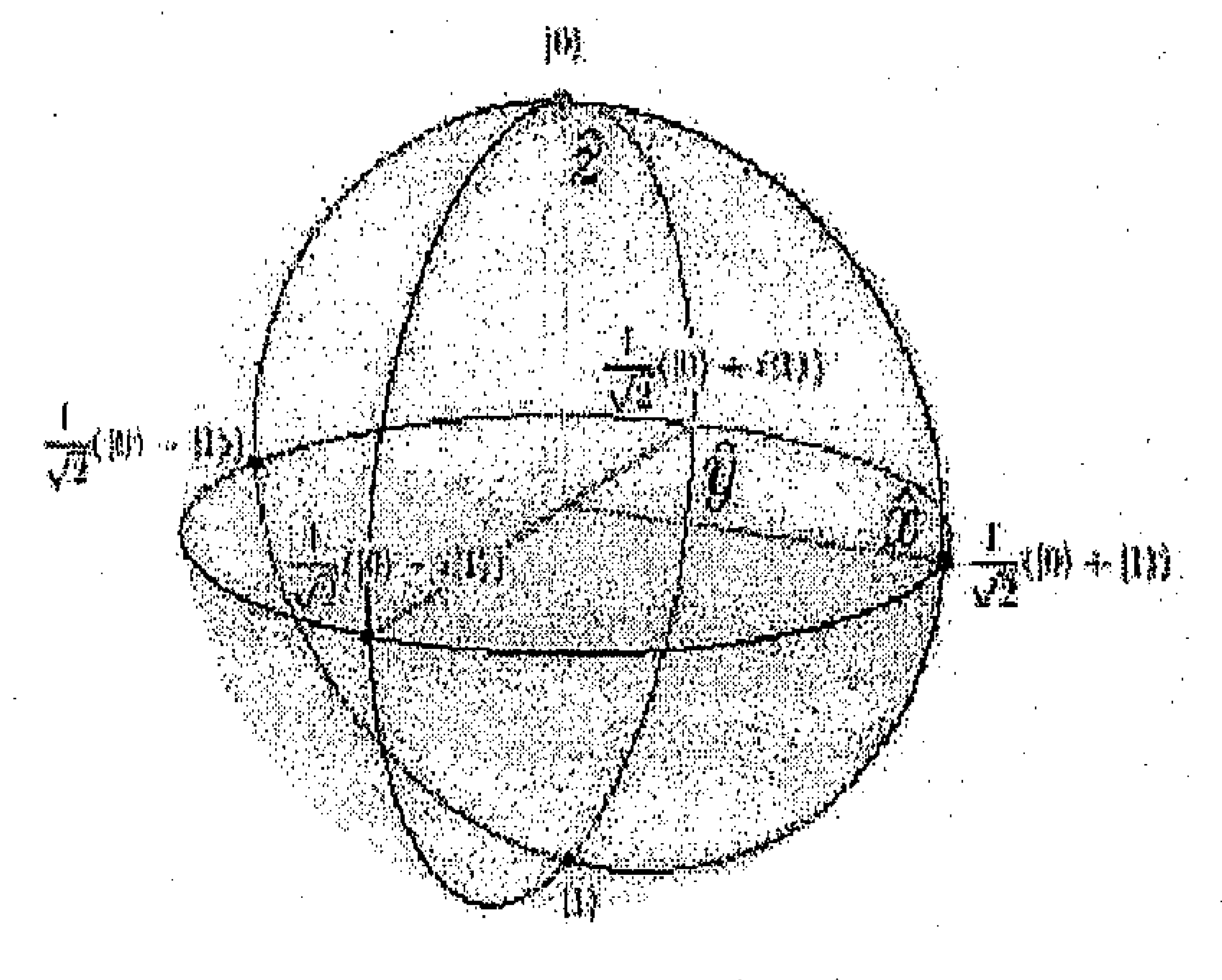
$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \qquad (4.10)$$

لذا و بلغة الزاوية θ و الزاوية ϕ، تبدو كرة بلوخ كما هو موضح في الشكل(4-2).

ما يمكن أن يكون ذا فائدة أكبر في هذه المرحلة هو رؤية مواقع جميع الحالات الممكنة للكيوبت على كرة بلوخ. وهذا ما يوضحه الشكل(4-3): والنقاط $\hat{x}$ و $\hat{y}$ و $\hat{z}$ تدل على كل محور موجب.

إن الكيوبتات المنفردة يمكن أن تدرك فيزيائياً باستخدام أنظمة كمية ثنائية الحالة متنوعة، وهذه بعض الطرق لعمل ذلك:

- استقطاب الفوتون Polarizations of a photon
- البرم النووي Nuclear spins
- الحالتان: الأرضية ground state و المتهيجة excited state لذرة (أي: مستوى الطاقة أو المدار)



الشكل (4-3): تمثيل الحالات.

نحن الآن نبحث عن المكافئ للمسجل register؛ أي: نظام مركب من الكيوبتات، مثل أيونات أسيرة Ions in a trap.

4-3-5 الكيوبتات المتعددة Multiple Qubits

إن الكمية الممكنة من المعلومات المتوفرة أثناء الطور الحوسبي ينمو بصورة أسية مع حجم النظام؛ أي عدد الكيوبتات. هذا لأنه إذا كان لدينا عدد n من الكيوبتات فان عدد حالات الأساس يكون 2^n.

على سبيل المثال لو كان لدينا كيوبتان يشكلان مسجلا كميا فإن هناك 4 $(= 2^2)$ حـــالات أساس حوسبة، هي:

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle \quad (4.11)$$

$|01\rangle$ هنا تعني أن الكيوبت الأول يكون في الحالة $|0\rangle$ والكيوبت الثاني يكون في الحالـــة $|1\rangle$ وهكذا.....

في الحقيقة لدينا $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$، حيث $\otimes$ هو الضرب الممتد tensor product.

و مثل الكيوبت المنفرد، يمكن لمسجل الكيوبتين أن يوجد في تراكب للمنازل الأربعة (في أدناه قمنا بتغيير الصيغة للمعاملات المركبة، أي سعات الاحتمال)

$$|\Psi\rangle = \alpha_0|00\rangle + \alpha_1|01\rangle + \alpha_2|10\rangle + \alpha_3|11\rangle \quad (4.12)$$

مجدداً، يجب أن يساوي مجموع جميع الاحتمالات 1، رسمياً، يمكن كتابة الحالة العامـــة لعدد n من الكيوبتات:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1 \quad (4.13)$$

مثال(4-5): $n = 5$ (5 كيوبتات)، لدينا حتى $32 \left(= 2^5\right)$ من منازل الأساس في تراكب

$$\Psi = \alpha_0|00000\rangle + \alpha_1|00001\rangle + \ldots + \alpha_{2^n-1}|11111\rangle$$

لا يتوجب علينا أن نمثل القيم باستخدام 0 و 1. للكيوبت الشكل التالي في $\mathbb{C}^N$:

$$\Psi = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \ldots + \alpha_{n-1}|N-1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix}$$

إذا كانت $N = 2^n$ فإنه يلزمنا مسجل ذو n من الكيوبتات.

4-3-6 الضرب الممتد tensor product

إن تجزئة نظام متعدد –الكيوبتات (multi-qubit system) إلى كيوبتات منفردة يمكن أن يمثل بالضرب الممتد، $\otimes$.

مثال(4-6): التجزئة باستخدام الضرب الممتد.

$$\frac{1}{2}\left(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)$$

يمكن استخدام الضرب الممتد أيضاً لتجميع كيوبتات مختلفة

(4.15)

$$\left(\alpha_0|0\rangle+\alpha_1|1\rangle\right)\otimes\left(\beta_0|0\rangle+\beta_1|1\rangle\right)=\alpha_0\beta_0|00\rangle+\alpha_0\beta_1|01\rangle+\alpha_1\beta_0|10\rangle+\alpha_1\beta_1|11\rangle$$

4-3-7 القياس الجزئي Partial Measurement

نستطيع قياس مجموعة جزئية subset لنظام ذي n من الكيوبتات. أي أنه بإمكاننا عدم قراءة كل الكيوبتات (فيمكن لبعضها أن يظل دون قياس). سنتأمل أولا الحالات غير المتشابكة nonentangled states. الطريقة الأبسط لقياس مجموعة جزئية للحالات مبينة في المثالين التاليين مع كيوبتين.

مثال(4-7):

حساب البت الأول في نظام مكون من كيوبتين:

1. نحضر نظاما كميا كالموضح في الحالة الآتية_الكيوبت المراد قياسه غسامق. الحالة

$$\psi=\alpha_0|\mathbf{0}0\rangle+\alpha_1|\mathbf{0}1\rangle+\alpha_2|\mathbf{1}0\rangle+\alpha_3|\mathbf{1}1\rangle$$

2. الآن نباشر بالقياس، لذا فاحتمال أن يكون 0 هو:

$$\Pr(0)=|\alpha_0|^2+|\alpha_1|^2$$

و احتمال أن يكون 1 هو:

$$\Pr(1)=|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2$$

3. إذا كان قياسنا 0 ، فتكون حالة القياس اللاحقة هي:

$$|0\rangle\otimes\frac{\alpha_0|0\rangle+\alpha_1|1\rangle}{\sqrt{|\alpha_0|^2+|\alpha_1|^2}}$$

(أي: أننا نقوم بعمل إسقاط على فضاء $\{|00\rangle,|01\rangle\}$ الثانوي و تُسقط حدود α_2 و α_3).

بالمثل؛ إذا كان قياسنا $|1\rangle$، حالة القياس اللاحقة تكون:

$$|1\rangle \otimes \frac{\alpha_2|0\rangle + \alpha_3|1\rangle}{\sqrt{|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2}}$$

نستطيع فعل ذات الشيء لكيوبتين، احتمال أن يكون الكيوبت الثاني $|0\rangle$ هو:

$$\Pr(0) = |\alpha_0|^2 + |\alpha_2|^2$$

وستكون حالة القياس التالية:

$$\frac{\alpha_0|0\rangle + \alpha_2|1\rangle}{\sqrt{|\alpha_0|^2 + |\alpha_2|^2}} \otimes |0\rangle$$

هذا المنطق يمكن أن ينسحب على n من الكيوبتات.

يمكن وصف القياس الكمي كمجموعة $\{M_m\}$ من مؤثرات خطية linear operators، حيث: $1 \le m \le n$ و n هو: عدد القراءات الممكنة. نستطيع تعريف مؤثرات قياس لكيوبت منفرد بأسس عمودية-معايرة orthonormal basis $|0\rangle$ و $|1\rangle$ كالتالي: $M_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $M_1 = |1\rangle\langle 1|$ (وهما أيضاً مُسقِطان.

إذا كان لدينا نظام في الحالة $|\Psi\rangle$ عندها يكون احتمال القراءة m:

$$\Pr(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle \tag{4.16}$$

إذا كان الناتج هو m، عندها تصبح الحالة كما يلي:

$$\frac{M_m|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}} \tag{4.17}$$

مثال(4-8): طريقة أخرى لفحص قياس البت الأول في نظام الكيوبتين

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}|00\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|01\rangle + \frac{3}{\sqrt{30}}|10\rangle + \frac{4}{\sqrt{30}}|11\rangle$$

عندما نقيس الكيوبت الأول، تكون المنازل الناتجة شبيهة بالتالي(غير معيرة):

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{30}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|1\rangle \right)$$

لقياس $\langle 0|$ و لقياس $\langle 1|$:

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \left(\frac{3}{\sqrt{30}}|0\rangle + \frac{4}{\sqrt{30}}|1\rangle\right)$$

الآن يجب علينا أن نتأكد أن الكيوبت الثاني معيراً، لذا نضربه بمعامل:

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}|0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle\right) + \frac{5}{\sqrt{30}}|1\rangle \otimes \left(\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle\right)$$

$|1\rangle$ $\quad \left|\frac{5}{\sqrt{30}}\right|^2 = \frac{5}{6}$ $\quad |0\rangle$ $\quad \left|\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\right|^2 = \frac{1}{6}$

$|0\rangle$

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle\right)$$

و إذا قسنا $\langle 1|$، بعدها تكون حالة القياس التالية:

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \left(\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle\right)$$

مثال(4-9): قياس الكيوبت الأول في نظام مكون من كيوبتين باستخدام مُسقِط بسيط:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}|00\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|01\rangle + \frac{3}{\sqrt{30}}|10\rangle + \frac{4}{\sqrt{30}}|11\rangle$$

$|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|$ $\quad |0\rangle$

$$(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|)\left(\frac{1}{\sqrt{30}}|00\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|01\rangle + \frac{3}{\sqrt{30}}|10\rangle + \frac{4}{\sqrt{30}}|11\rangle\right)$$
$$= (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|)|\psi\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{30}}|00\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|01\rangle$$

لنقل أننا غيرنا أساس قياسنا إلى $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ عندها نستطيع تمثيل المسقطين P_0 و P_1 كالتالي:

$|0\rangle\langle 0|$ و $|1\rangle\langle 1|$ بالترتيب. نقيس احتمال كون الكيوبت الأول 0 باستخدام P_0 على الكيوبت الأول و I على الكيوبت الثاني، أي: $P_0 \otimes I$. إذا أردنا قياس احتمال كون الكيوبت الأول 1 عندها نستخدم $P_1 \otimes I$.

$$\Pr(0) = \langle\Psi|P_0 \otimes I|\Psi\rangle$$
$$= \langle\Psi\|0\rangle\langle 0| \otimes I|\Psi\rangle$$
$$= \langle\Psi|\frac{1}{\sqrt{30}}|\mathbf{00}\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|\mathbf{01}\rangle$$
$$= \frac{1}{6}$$

وهذا يعطينا حالة القياس التالية:

$$|\Psi'\rangle = \frac{P_0 \otimes I|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_0 \otimes I|\Psi\rangle}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{30}}|\mathbf{00}\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|\mathbf{01}\rangle}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$$
$$= |0\rangle \otimes \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{30}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{1}{6}}}\right)$$
$$= |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle\right)$$

خصائص:

مجموع جميع الاحتمالات يكون 1، $\sum_{i=1}^{m} \Pr(i) = \sum_{i=1}^{m} \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = 1$

هذه نتيجة معادلة الكمال completeness equation، أي:

$$\sum_{i=1}^{m} M_i^\dagger M_i = 1 \qquad (4.18)$$

ملاحظة: أساسنا يحتاج أن يكون عمودياً، ما عدا ذلك لا نستطيع بثقة التمييز بين أساسيّ منزلتيّ $|u\rangle$ و $|v\rangle$، أي: $\langle u|v\rangle \neq 0$ و تعني أن $|u\rangle$ و $|v\rangle$ ليسا عموديان.

4-3-8 القياسات الإسقاطية Projective Measurements

القياسات الإسقاطية هي واسطة لإنجاز مهمتان، هما:

1. تطبيق تحويل وحدوي (unitary transform) على $|\Psi\rangle$.
2. قياس $|\Psi\rangle$.

لذا؛ نحتاج تحويلاً وحدوياً U و $|\Psi\rangle$ لإنجاز قياس. هذا التحويل الوحدوي يسمى: المراقب observable و المشار إليه هنا بالرمز O_M.

أولاً: نحتاج لإيجاد التجزيء الطيفي spectral decomposition للمراقب O_M (z على سبيل المثال). ل O_M لدينا:

$$O_M = \sum_m mP_m \qquad (4.19)$$

حيث: m هي كل قيمة مميز eigenvalue و P_m هي مسقط مكون $P_m = |m\rangle\langle m|$

4-4 الحالات المتشابكة Entangled States

إن الجسيمات الذرية الأولية Subatomic particles تستطيع أن تتشابك، وهذا يعني أنها تتصل بغض النظر عن المسافة. تأثيراتها على بعضها عند القياس يكون لحظياً، وهذا مفيد للأغراض الحوسبية.

لنأخذ الحالة التالية (والتي هي غير متشابكة):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$$

يمكن أن تفك إلى:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle$$

عند قياس الكيوبت الأول (قياساً جزئياً) نحصل على 0 100% من الزمن، وتصبح حالة الكيوبت الثاني:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

معطيةً إيانا احتمالين متساويين لكل من 0 و 1.

إذا ما حاولنا تجربة هذا على حالة متشابكة (في هذه الحالة زوج EPR أو حالة بيل Bell state)، نجد أن النتائج للكيوبتات تكون مرتبطة correlated.

مثال(4-10):

لنأخذ: $$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$$

عندما يفك هذا يكون:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle+0|01\rangle+0|10\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

قياس الكيوبت الأول يعطينا $\langle 00|$ 50% من الزمن و $\langle 11|$ 50% من الزمن، لذا يكون الكيوبت الثاني دائماً مثل الأول، أي: نحصل على قيمتي كيوبتين لحساب قياس واحد.

هذا النوع من الارتباط يمكن استخدامه من خلال تغيير طرق التطبيق للكيوبت الأول و الثاني ليعطينا ارتباطات تكون متصلة بقوة إحصائيا. ولهذه حسنة مميزة تفوق الحوسبة الكلاسيكية.

قياس منازل متشابكة يعلل الارتباط بينها، و المثال التالي يظهر قياس حالة متشابكة جزئياً.

مثال(4-11): متجه الحالة التالي يمثل نظاماً متشابكاً

$$|\Psi\rangle=\frac{2}{3}|01\rangle+i\frac{2}{3}|10\rangle+\frac{1}{3}|00\rangle$$

إذا قمنا بتجزيء الكيوبتات (تجزيئاً ممتداً tensor decomposition فتكون الحالة كالتالي (غير معيرة unnormalised)

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{2}{3}|1\rangle + \frac{1}{3}|0\rangle\right) + |1\rangle \otimes i\frac{2}{3}|0\rangle$$

الآن يجب أن نكون متأكدين من أن الكيوبت الثاني معير، لذا نضربها بمعامل:

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{5}}{3}|0\rangle \otimes \left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\right) + i\frac{2}{3}|1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|0\rangle$$

$$|\Psi'\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\right)$$

بعيد قياس $|1\rangle$ تنطبق الحالة إلى:

$$|\Psi'\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$$

5-4 الدارات الكمية Quantum Circuits

إذا أخذنا حالة كمية_تمثل كيوبتاً أو أكثر_ و قمنا بتطبيق متتالية من المؤثرات الوحدوية (بوابات كمية quantum gates)، تكون النتيجة دارة كمية. سنأخذ الآن مسجلاً وندع البوابات تؤثر على الكيوبتات كما هو الحال مع دارة مألوفة.

الشكل(4-4): شكل مبسط لدارة

هذا يعطينا شكلاً مبسطاً للدارة الكمية (أنظر للشكل(4-4)) و هي سلسلة من العمليات و القياسات على الحالة لعدد n من الكيوبتات. كل عملية تكون وحدوية و يمكن وصفها بمصفوفة أبعادها $2^n \times 2^n$.

كل خط من الخطوط هو سلك مجرد، الصناديق التي تحوي U_n هي بوابات منطقية كمية (أو سلسلة من البوابات)، ورمز المقياس ذو المؤشر يدل على قياس. البوابات و الأسلاك وميكانيكية المدخلات و المخرجات، جميعها معاً تحقق الخوارزميات الكمية quantum algorithms. بخلاف الدارات الكلاسيكية و التي تحتوي على دارات كهربائية مقفلة loops تكون الدارات الكمية "دارات اللقطة الواحدة"one shot circuits و التي تنفذ مرة واحدة فقط من اليسار إلى اليمين (و تكون لهدف خاص؛ أي أن هناك دارة مختلفة لكل خوارزمية). من الجدير بالملاحظة انه من الممكن دائماً إعادة ترتيب الدارات الكمية ، بحيث تتم جميع القياسات في نهاية الدارة.

1-5-4 بوابات الكيوبت المنفرد Single Qubit Gates

كما يُمثل الكيوبت المنفرد بمتجه عمود column vector، تُمثل البوابة التي تؤثر على الكيوبت بمصفوفة أبعادها 2×2؛ فعلى سبيل المثال المكافئ الكمي لبوابة النفي NOT gate يتخذ الشكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

القيد الوحيد الذي يتوجب على هذه البوابات تحقيقه هو أن تكون وحدوية (كما هو مطلوب في ميكانيكا الكم)، حيث أن المصفوفة الوحدوية هي المصفوفة التي تحقق الشرط أدناه. هذا مأخوذ به لكثير من البوابات المتاحة.

$$U^{\dagger}U = I$$

تؤثر المصفوفة على الكيوبت كمؤثر كمي. يجب أن تكون مصفوفة المؤثر وحدوية لان القيم المحصلة يجب آن تحقق شرط المعايرة normalization condition. الوحدوية كذلك تتضمن أن يظل مجموع سعات الاحتمال 1. إذا كان (قبل تطبيق البوابة):

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

فإن (بعد تطبيق البوابة):

$$|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1 \qquad (4.20)$$

حيث: α' و β' هي قيم سعات الاحتمال للكيوبت بعد أن تكون العملية قد طبقت. دعنا نعطي بعض الأمثلة:

4-5-2 بوابة باولي I Pauli I Gate

هذه هي البوابة المحايدة identity gate.

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.21)$$

وتعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow I \rightarrow |0\rangle \qquad (4.22)$$

$$|1\rangle \rightarrow I \rightarrow |1\rangle \qquad (4.23)$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow I \rightarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad (4.24)$$

4-5-3 بوابة باولي X Pauli X Gate

بوابة باولي X هي بوابة النفي الكمية quantum NOT gate.

$$-\boxed{X}-$$

$$\sigma_1 = \sigma_X = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

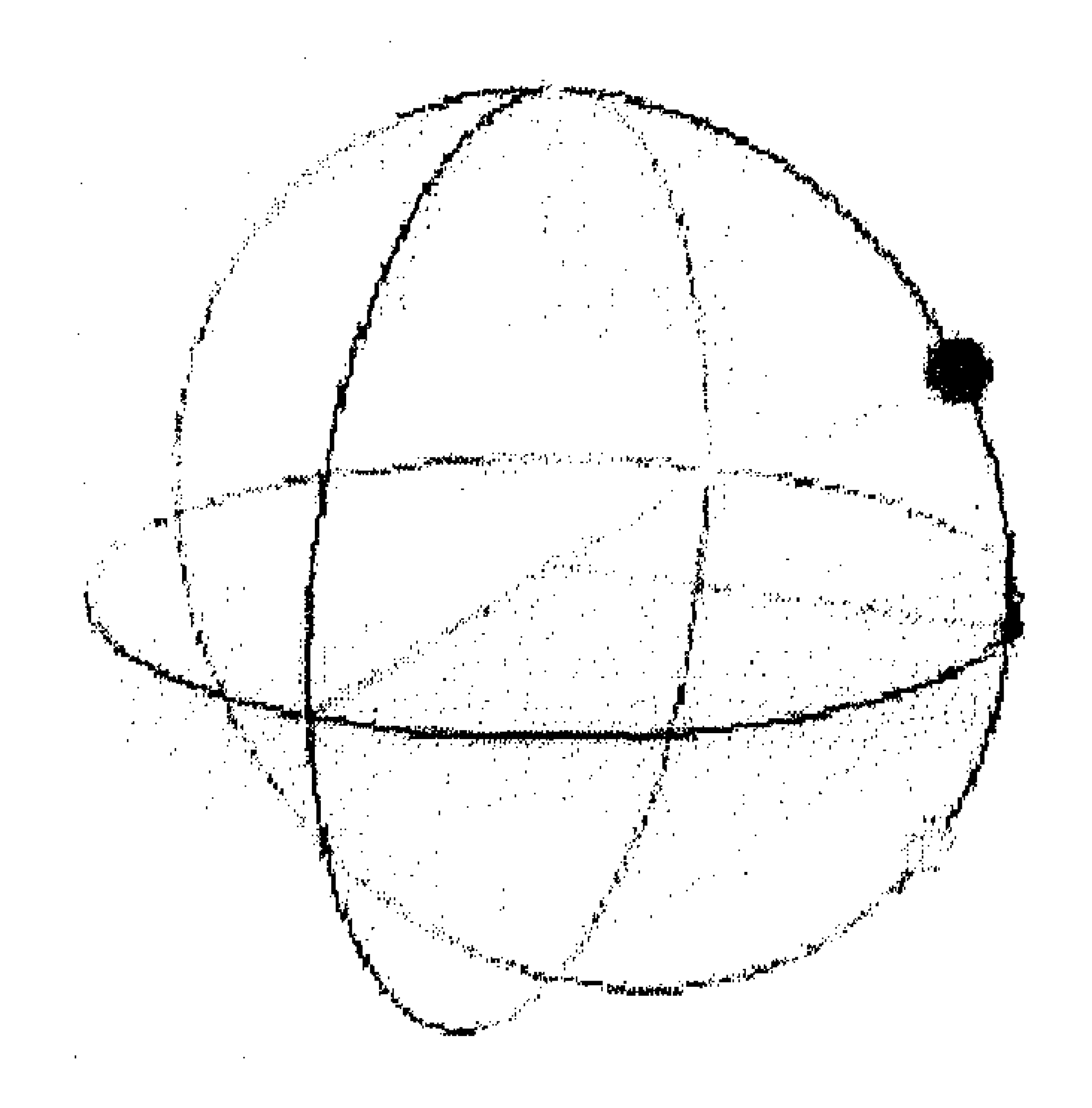
والتي تعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow X \rightarrow |1\rangle \quad (4.26)$$

$$|1\rangle \rightarrow X \rightarrow |0\rangle \quad (4.27)$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow X \rightarrow \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle \quad (4.28)$$

يمكن تصوير تأثير بوابة باولي X على كرة بلوخ كما هو موضح في الشكل(4-5). هذ (وفي شكل 4-6) أيضا) النقطة الزرقاء(الغامقة) هي متجه الحالة الأصلي، و النقطة الخضراء (الفاتحة) هي متجه الحالة بعد التحويل.



الشكل(4-5): تأثير بوابة باولي على كرة بلوخ.

4-5-4 بوابة Y لباولي Pauli Y Gate

$$-\boxed{Y}-$$

$$\sigma_2 = \sigma_Y = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

التي تعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow Y \rightarrow i|1\rangle \quad (4.30)$$

$$|1\rangle \rightarrow Y \rightarrow -i|0\rangle \quad (4.31)$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow Y \rightarrow -i\beta|0\rangle + i\alpha|1\rangle \quad (4.32)$$

5-5-4 بوابة Z لباولي Pauli Z Gate

هذه البوابة تقلب إشارة الكيوبت؛ أي: تغير الطور النسبي بمعامل مقداره -1.

$$—\boxed{Z}—$$

$$\sigma_3 = \sigma_Z = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

التي تعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow Z \rightarrow |0\rangle \quad (4.34)$$

$$|1\rangle \rightarrow Z \rightarrow -|1\rangle \quad (4.35)$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow Z \rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \quad (4.36)$$

4-5-6 بوابة الطور Phase Gate

$$—\boxed{S}—$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

التي تعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow S \rightarrow |0\rangle \quad (4.38)$$

$$|1\rangle \rightarrow S \rightarrow i|1\rangle \quad (5.39)$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow S \rightarrow \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle \quad (4.40)$$

ملاحظة: يمكن أن يعبر عن بوابة الطور بلغة بوابة T (T gate) (انظر أسفل).

$$S = T^2 \quad (4.41)$$

4-5-7 بوابة $\frac{\pi}{8}$ (بوابة T) $\frac{\pi}{8}$ Gate (T Gate)

$$—\boxed{T}—$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

التي تعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow T \rightarrow |0\rangle \tag{4.43}$$

$$|1\rangle \rightarrow T \rightarrow e^{i\pi/4}|1\rangle \tag{4.44}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow T \rightarrow \alpha|0\rangle + e^{i\pi/4}\beta|1\rangle \tag{4.45}$$

إذا طبقنا T مرة أخرى فسنحصل على ذات النتيجة فيما لو طبقنا S مرة واحدة.

4-5-8 بوابة هادامارد Hadamard Gate

و تسمى أحيانا "الجذر ألتربيعي لبوابة النفي" (square root of NOT gate)، وتقوم بإحالة $|0\rangle$ و $|1\rangle$ إلى تراكب (لاحظ الإشارة المختلفة). هذه البوابة هي واحدة من أهم البوابات في الحوسبة الكمية. سنستخدم هذه البوابة لاحقاً لعرض خوارزمية بسيطة.

$$-\boxed{H}-$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

التي تعطينا التالي:

$$|0\rangle \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{4.47}$$

$$|1\rangle \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{4.48}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow H \rightarrow \alpha\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \tag{4.49}$$

مثال(4-12): استخدام بوابتي H و Z و القياس بأساسات $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

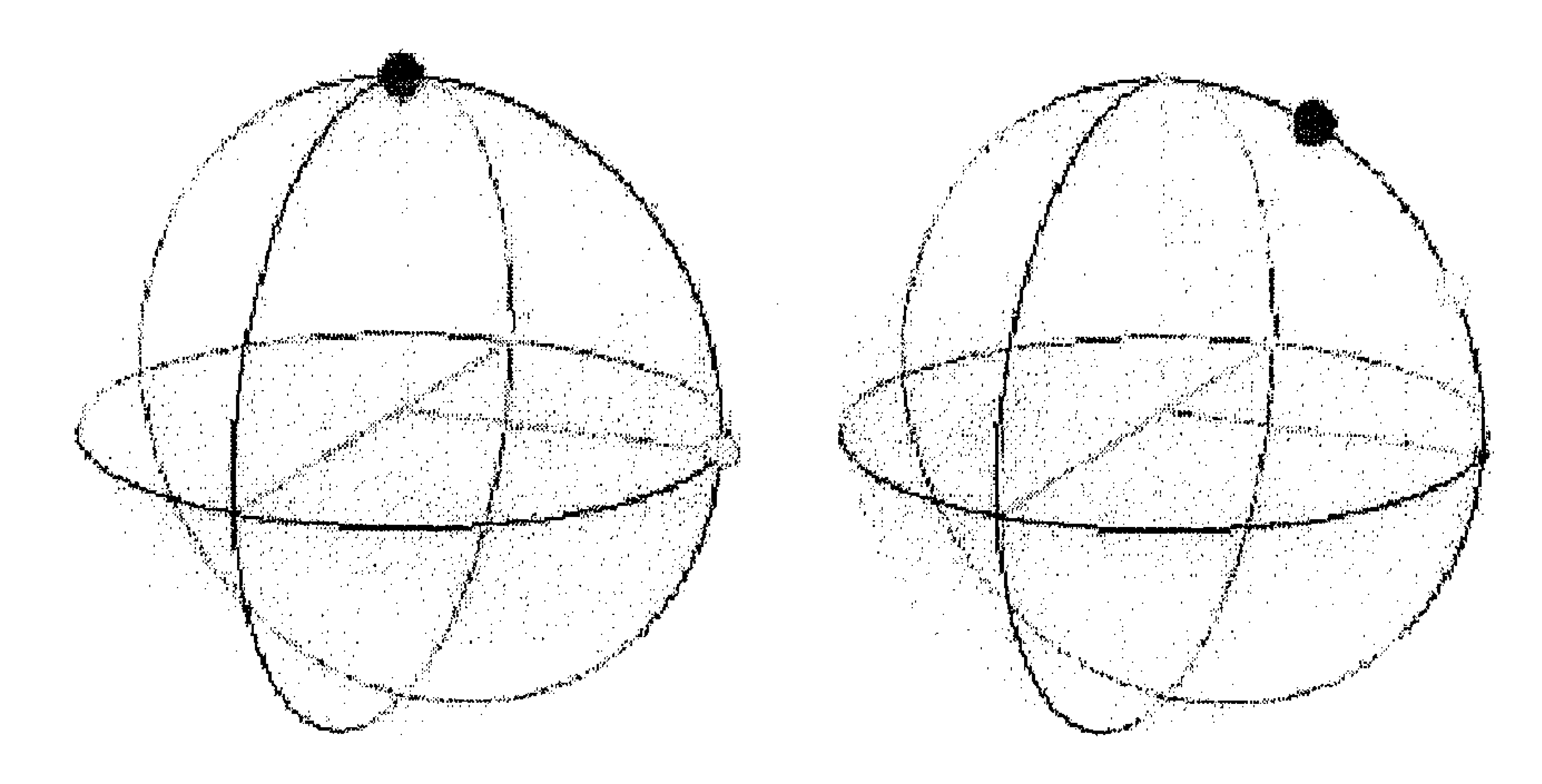
(1) يمكننا وضع $|0\rangle$ في الحالة $|+\rangle$ باستخدام بوابة H:

$$|0\rangle \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|-\rangle \qquad\qquad |0\rangle$$

$$|0\rangle \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow Z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

تأثير بوابة H يمكن أن يصور على كرة بلوخ كالتالي:



الشكل(4-6): تأثير بوابة Hعلى كرة بلوخ.

4-5-9 رمز الضرب الخارجي Outer Product Notation

هناك طريقة ملائمة لتمثيل البوابات و هي باستخدام رمز الضرب الخارجي؛ على سبيل المثال بوابة باولي X يمكن أن تمثل:

$$|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

و عند تطبيقها على $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ، نحصل على:

$$X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$= |1\rangle\langle 0|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |0\rangle\langle 1|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$= \alpha|1\rangle 1 + \beta|1\rangle 0 + \alpha|0\rangle 0 + \beta|0\rangle 1$$

$$= \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

لما ذكر أعلاه من المفيد تذكر ما يلي:

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

$$\langle 0|1\rangle = 0$$

$$\langle 1|0\rangle = 0$$
$$\langle 1|1\rangle = 1$$

بدلاً من القيام بكل تلك العمليات الرياضية، فقط لنفكر بهذه الطريقة: لكل مركبة من المتتالية خذ جزء البرا، أي $\langle u|$ من $|v\rangle\langle u|$، فيكون معامل الكيوبت الجديد هو معامل الكيوبت القديم و لكن لجزء الكيت $|v\rangle$.

مثال(4-13):

لنستخدم هذه الطريقة في التمثيل ألضربي الخارجي لباولي Y،

$$i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|$$

ى ما الذي سنحصل عليه: $|\ \rangle$ $|\ \rangle$ $|\ \rangle$

جـزء $\alpha|0\rangle$

$|\ \rangle$

$$|\Psi\rangle = \ldots + i\alpha|1\rangle$$

$|\ \rangle\langle\ |$ β تصبح: $i\beta|0\rangle$ ، واخيراً نحصل على:

$$|\Psi\rangle = \quad |\ \rangle + i\alpha|\ \rangle$$

رب الخارجي نفس مدخلات المصفوفة، لذا للمصفوفة

التالية:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{00}|0\rangle\langle 0| + \alpha_{01}|0\rangle\langle 1| + \alpha_{10}|1\rangle\langle 0| + \alpha_{11}|1\rangle\langle 1|$$

6-4 خصائص أخرى لبوابات باولي Further Proerties of the Pauli Gates

سننظر إلى للمتجهات المميزة eigenvectors و القيم المميزة eigenvalues و التجزيء الطيفي و تمثيل الضرب الخارجي outer product representation لبوابات

باولي. I لها متجهات مميزة $|0\rangle$ و $|1\rangle$ وقيم مميزة 1 و 1 بالترتيب. باستخدام نظرية التجزيء الطيفي

$$I = 1\cdot|0\rangle\langle 0| + 1\cdot|1\rangle\langle 1|$$
$$= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \qquad (4.50)$$

X لها متجهات مميزة $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$، و قيم مميز 1 و -1 بالترتيب.

$$X = 1.\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) + (-1).\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)$$
$$= |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \qquad (4.51)$$

Y لها متجهات مميزة $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i|0\rangle + |1\rangle)$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$، و قيم مميزة 1 و -1 بالترتيب.

$$Y = 1.\frac{1}{\sqrt{2}}(-i|0\rangle + |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(i\langle 0| + \langle 1|) + (-1).\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + i\langle 1|)$$
$$= i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| \qquad (4.52)$$

Z لها متجهات مميزة $|0\rangle$ و $|1\rangle$، و قيم مميزة 1 و -1 على الترتيب.

$$Z = 1.|0\rangle\langle 0| + (-1).|1\rangle\langle 1|$$
$$= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \qquad (4.53)$$

تكون مصفوفات باولي:

- وحدوية Unitary $\quad (\sigma_k)^\dagger = I\forall k$
- هيرميتية Hermitian $\quad (\sigma_k)^\dagger = \sigma_k \forall k$

4-6-1 مؤثرات الدوران Rotation Operators

هناك ثلاثة مؤثرات مفيدة تنسجم مع كرة بلوخ وهي مؤثرات الدوران R_X و R_Y و R_Z.

$$R_X = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta X/2} \qquad (4.54)$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta Y/2} \qquad (4.55)$$

$$R_Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta Z/2} \qquad (4.56)$$

يمكن كتابة مؤثرات الدوران بالشكل التالي:

$$\cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} P_\sigma \qquad (4.57)$$

حيث: P_σ تعني: مؤثر باولي المعروف ب($\sigma = X$ و Y و Z).

في الحقيقة إذا فرضنا قيم مختلفة للزاوية θ، فان جميع بوابات الكيوبت المنفـرد يمكـن تمثيلها بناتج ضرب R_Y و R_Z.

مثال(4-14):

نستطيع تمثيل $R_Y(90°)$ بالمصفوفة التالية:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = |1\rangle$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

في الخطوة الأخيرة قمنا بضرب الحالة ككل بمعامل الطـور الـشامل (global factor phase) و هو 1−.

2-6-4 بوابات الكيوبتات المتعددة Multi Qubit Gates

إن البوابة الكمية الصحيحة يجب أن تكون عكـوس reversible، وهـذا يتطلـب أن تستعمل بوابات الكيوبتات المتعددة خط تحكم control line، حيث أن خط الـتحكم هـذا لا يتأثر بالتحويل الوحدوي unitary transformation. سننظر مجدداً إلى البوابات العكـوس المعرفة في فصل 2 ولكن بتوكيد على الحوسبة الكمية هذه المرة.

$$|a\rangle \text{ ——•—— } |a\rangle$$
$$|b\rangle \text{ ——}\oplus\text{—— } |b \oplus a\rangle$$

في حالة بوابة النفي التحكمية CNOT gate، $\oplus$ هي بوابة XOR الكلاسيكية بمدخلات على خط b و التحكم على خط a. و بما أنها بوابة كيوبتين فإنها تمثل بمصفوفة 4×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

والتي تعطي التالي:

$$|00\rangle \to CNOT \to |00\rangle \quad (4.59)$$
$$|01\rangle \to CNOT \to |01\rangle \quad (4.60)$$
$$|10\rangle \to CNOT \to |11\rangle \quad (4.61)$$
$$|11\rangle \to CNOT \to |10\rangle \quad (4.62)$$

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|1\rangle \rightarrow CNOT \rightarrow \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle \quad (4.63)$$

$$|0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow CNOT \rightarrow \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle \quad (4.64)$$

$$|1\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow CNOT \rightarrow \alpha|11\rangle + \beta|10\rangle \quad (4.65)$$

مثال(4–15): تقدير:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle \rightarrow CNOT \rightarrow \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

مفكوك $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle$ هو: $\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle$ ، لذا و بصيغة المصفوفات لدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

4–6–3 بوابة النفي للكيوبت الثاني Qubit Two NOT Gate

كاستثناء من بوابة النفي التحكمية CNOT gate لدينا بوابة النفي$_2$ NOT_2 gate، والتي تقوم بعمل بوابة النفي NOT على الكيوبت الثاني، و تمثل بالمصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

التي تعطي التالي:

$$|00\rangle \rightarrow NOT_2 \rightarrow |01\rangle \quad (4.67)$$

$$|01\rangle \rightarrow NOT_2 \rightarrow |00\rangle \quad (4.68)$$

$$|10\rangle \rightarrow NOT_2 \rightarrow |11\rangle \quad (4.69)$$

$$|11\rangle \rightarrow NOT_2 \rightarrow |10\rangle \quad (4.70)$$

على الرغم من كونها بوابة غير شائعة الاستعمال، إلا انه من المثير ملاحظة إمكانية تمثيلها كضرب كرونيكر (Kronecker product) للمؤثرين I و X كالتالي:

$$NOT_2 = I \otimes X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

لذا نستطيع استخدام الضرب الممتد لبوابات باولي على كل من الكيوبت الأول و الثاني حال استخدام رمز البوابة NOT_2، كما هو مبين أدناه:

$$|00\rangle \rightarrow I \otimes X \rightarrow |01\rangle \tag{4.73}$$

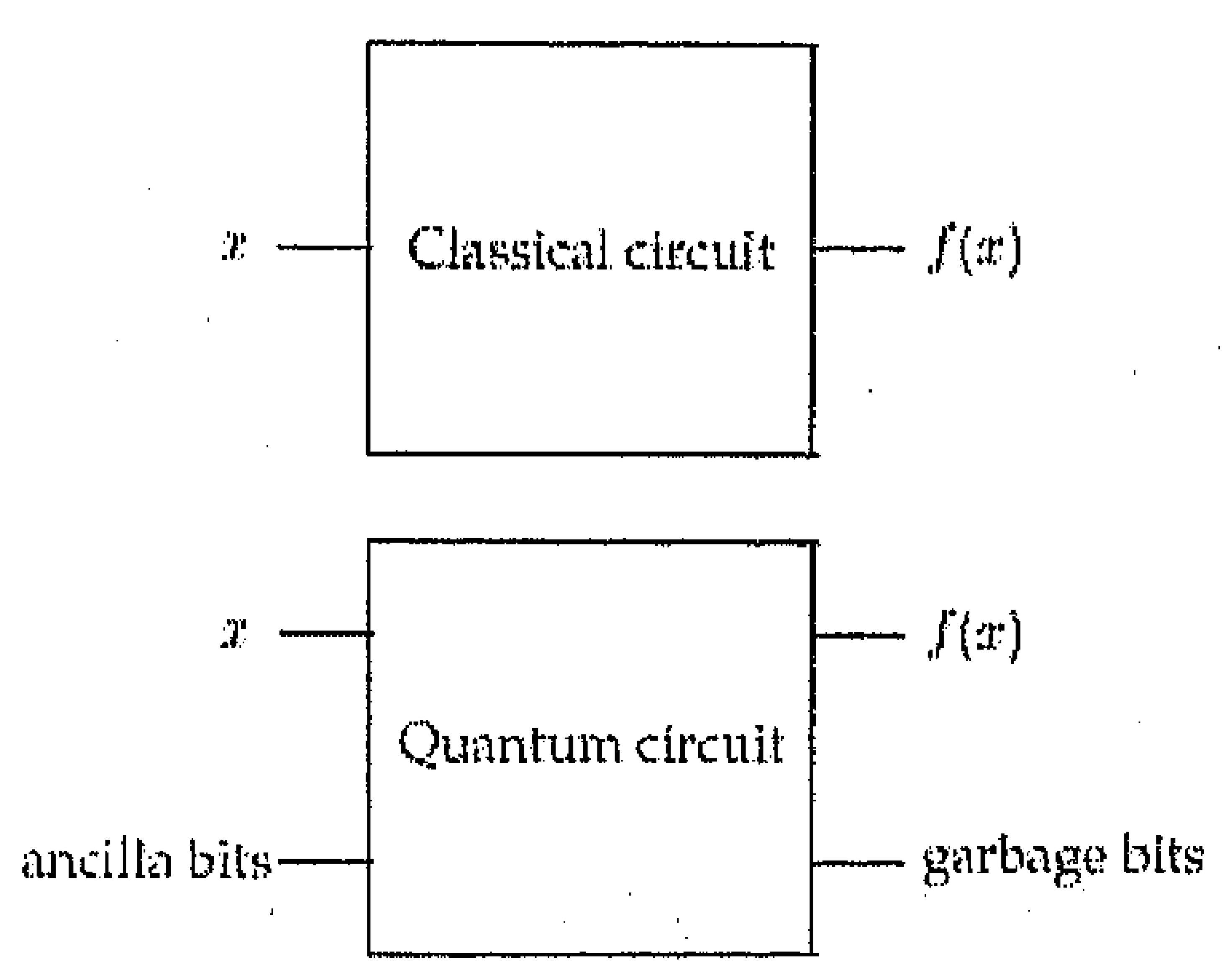
$$|01\rangle \rightarrow I \otimes X \rightarrow |00\rangle \tag{4.74}$$

$$|10\rangle \rightarrow I \otimes X \rightarrow |11\rangle \tag{4.75}$$

$$|11\rangle \rightarrow I \otimes X \rightarrow |10\rangle \tag{4.76}$$

4-6-4 بوابة توفولي Toffoli Gate

تم تقديم بوابة توفولي أولا في فصل 2. وهنا سنلقي نظرة على بعض الخصائص المتعلقة بالحوسبة الكمية. إن الخاصية الأكثر أهمية هي إمكانية محاكاة أي دارة كلاسيكية باستخدام بوابات توفولي.



الشكل(4-2): البتات الخادمة ancilla و بتات النفاية

تستطيع بوابة توفولي أن تحاكي بوابات نفي/الجمع (NAND gates)، و تستطيع أداء FANOUT والذي هو نسخ البت

الكلاسيكي(لكننا لا نستطيع نسخ سعات الاحتمال المتراكبة). FANOUT عملية سهلة في الحوسبة الكلاسيكية، و لكنها مستحيلة في الحوسبة الكمية بسبب نظرية الـلا ارتعـاش no cloning theorem (انظر فصل 6). بوابة توفولي أيضا يمكن أن تحاكى باستخدام عدد من بوابات H و T و S.

4-6-5 بوابة فريدكن Fredkin Gate

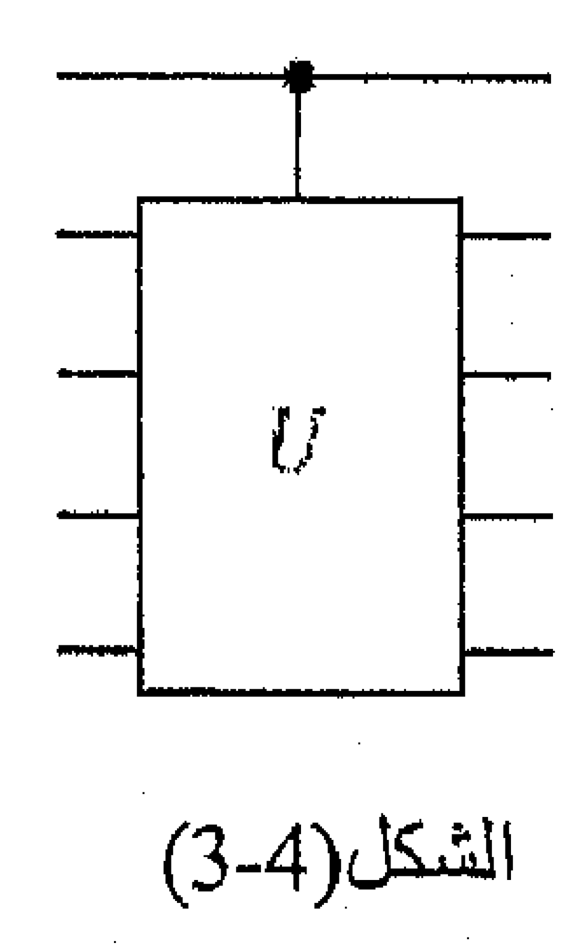
تم تقديمها أيضا في فصل 2، وهي بوابة أخرى بثلاثة كيوبتات. هذه البوابة يمكن أن تحاكي بوابة الجمـع AND و بوابـة النفـي NOT و CROSSOVER و FANOUT، ولها أيضا خاصـية مثيرة؛ وهي أنها تحتفظ بالعدد 1.

4-6-6 خصائص مهمة للدارات الكمية

Important Properties of Quantum Circuits

إن لأشكال الدارة الكمية قيوداً تجعلها مختلفةً عن الأشكال الكلاسيكية، وهي:

1. لا تكون حلقية (لا يوجد دارات كهربائية مقفلة no loops).
2. ليست FANIN؛ إذ أن FANIN تتطلب أن تكون الدارة لاعكوسية، فهي إذا ليست وحدوية.
3. ليست FANOUT؛ إذ لا نستطيع نسخ حالة الكيوبت أثناء الطور الحاسبي بسبب نظرية اللا ارتعاش no-cloning theorem.



الشكل(3-4)

جميع ما سبق يمكن أن يحاكى باستخدام البتات الخادمـة ancilla و بتات النفاية garbage في حالة كون الكيوبتـات في غير تراكب (الشكل(4-2)). كما هو مبين في فـصل1. بتات النفاية هي كيوبتات غير مستعملة تتبقى بعد الحوسبة، و البتات الخادمة هي كيوبتات إضافية يستعان بها من اجل الحسابات المؤقتة.

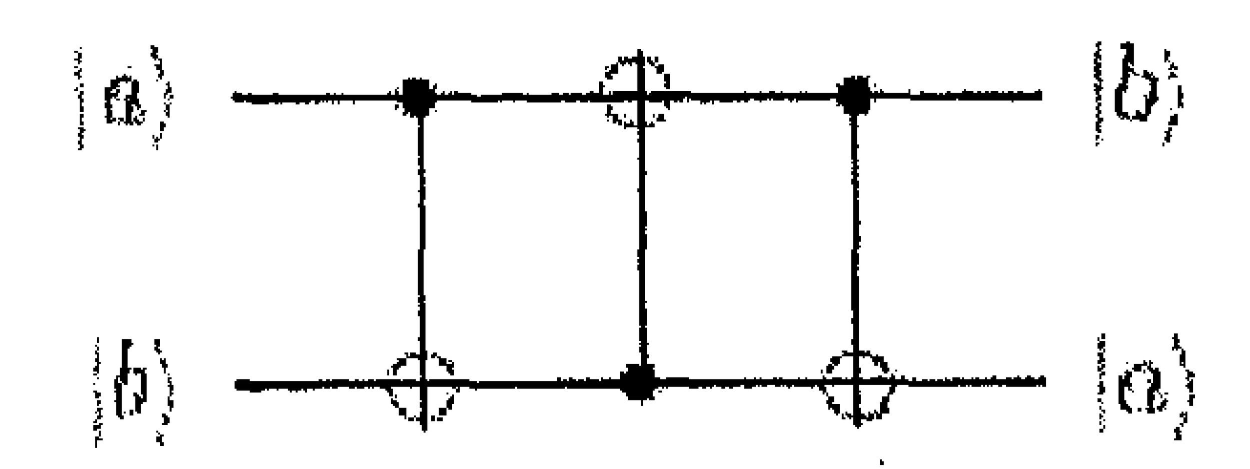
4-7 دارات شائعة Common Circuits

4-7-1 بوابة U التحكمية Controlled U Gate

لنفرض بأن U هي مصفوفة وحدوية تستعمل عدد اختياري من الكيوبتات. بوابة U التحكمية هي بوابة U بخط تحكم؛ أي إذا كان كيوبت التحكم هو $|1\rangle$ عندها تسؤثر U على كيوبتات بياناتها، و إلا فإنها تُترك وحدها (الشكل(4-3)).

4-7-2 دارة البت المقايَض Bit Swap Circuit

هذه الدارة تقايض قيم الكيوبتات بين الخطوط.



يمكن للدارة أن تبسط إلى:

و هنا بعض الأمثلة:

4-7-3 دارة النسخ Copying Circuit

إذا لم يكن لدينا تراكباً، عندها نستطيع نسخ البتات في المنطق الكلاسيكي بدارة CNOT.

$|0\rangle$ — CNOT — $|0\rangle$, $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ $\quad$ $|a\rangle \rightarrow |a\rangle$, $|0\rangle \rightarrow |a\rangle$ $\quad$ $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$

ولكن حين نستخدم التراكب كمدخل:

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $|0\rangle$ — CNOT

فان الحالة المتحدة combined state تصبح:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle$$

$$\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle \rightarrow CNOT \rightarrow \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

و هذه ليست نسخة عن الحالة الأصلية بسبب:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \neq \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

الكيوبت في حالة غير معروفة كمدخل لا يمكن نسخه، وحين يتسنى نسخه يجب أولا أن يقاس ليُنسخ. المعلومات المحمولة في نطاقات الاحتمال α و β تضيع.

4-7-4 دارة حالة بيل Bell State Circuit

هذه الدارة تنتج حالات بيل و التي تكون متشابكة.

سنمثل دارة حالة بيل ب(β)، و حالات بيل المنفردة ب($|\beta_{00}\rangle |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle$)

$|a\rangle$ — H — CNOT, $|b\rangle$ — $|\beta_{xy}\rangle$

$$|00\rangle \rightarrow \beta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow \beta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\beta_{01}\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow \beta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\beta_{10}\rangle$$

$$|11\rangle \to \beta \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\beta_{11}\rangle$$

5-7-4 الترميز فائق الكثافة Superdense Coding

انه لمن الممكن ربط بتين من المعلومات_باستخدام الأزواج المتشابكة entangled pair_ من خلال إرسال كيوبت واحد، وهنا الكيفية:

1. بدايةً: كل من أليس Alice و بوب Bob بأخذ نصف زوج EPR، ولنقل أننا نبدأ ب β_{00} . هذا يعني أن لأليس الكيوبت الغامق في $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}0\rangle + |\mathbf{1}1\rangle)$ و لبوب الكيوبت الغامق في $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\mathbf{0}\rangle - |1\mathbf{1}\rangle)$. بعدها يقوم كلاهما بالابتعاد مسافة اختيارية.

2. اعتماداً على المتجه الذي تريد أليس إرساله إلى بوب، تقوم بتطبيق بوابة (أو بوابات) على الكيوبت الخاص بها كما هو مبين في الأسفل، كذلك الحالة المتحدة مبينة بعد إجراء عملية البوابة على كيوبت أليس والذي يظهر غامقاً:

$$|00\rangle \to I \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}0\rangle + |\mathbf{1}1\rangle)$$

$$|10\rangle \to X(X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{1}0\rangle + |\mathbf{0}1\rangle)$$

$$|01\rangle \to Z(Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}0\rangle - |\mathbf{1}1\rangle)$$

$$|11\rangle \to XZ \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}1\rangle - |\mathbf{1}0\rangle)$$

3. الآن ترسل أليس الكيوبت الخاص بها إلى بوب بواسطة قناة كلاسيكية.

4. يقوم الآن بوب باستخدام بوابة $CNOT$ والتي تسمح له "بتحليل الكيوبت الثاني" فيما يبقى الأول في تراكب.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle) \to CNOT \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|10\rangle + \beta|01\rangle) \to CNOT \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|01\rangle + \beta|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|00\rangle-\beta|11\rangle\right)\rightarrow CNOT\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|00\rangle-\beta|10\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)|0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|01\rangle-\beta|10\rangle\right)\rightarrow CNOT\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|01\rangle-\beta|11\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)|1\rangle$$

5. الآن، يطبق بوب بوابة H على البت الأول لينطبق التراكب.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)\rightarrow H\rightarrow|1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)\rightarrow H\rightarrow|0\rangle$$

لذا، يحصل بوب على التالي:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)|0\rangle\rightarrow(H\otimes I)\rightarrow|00\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)|1\rangle\rightarrow(H\otimes I)\rightarrow|01\rangle$$

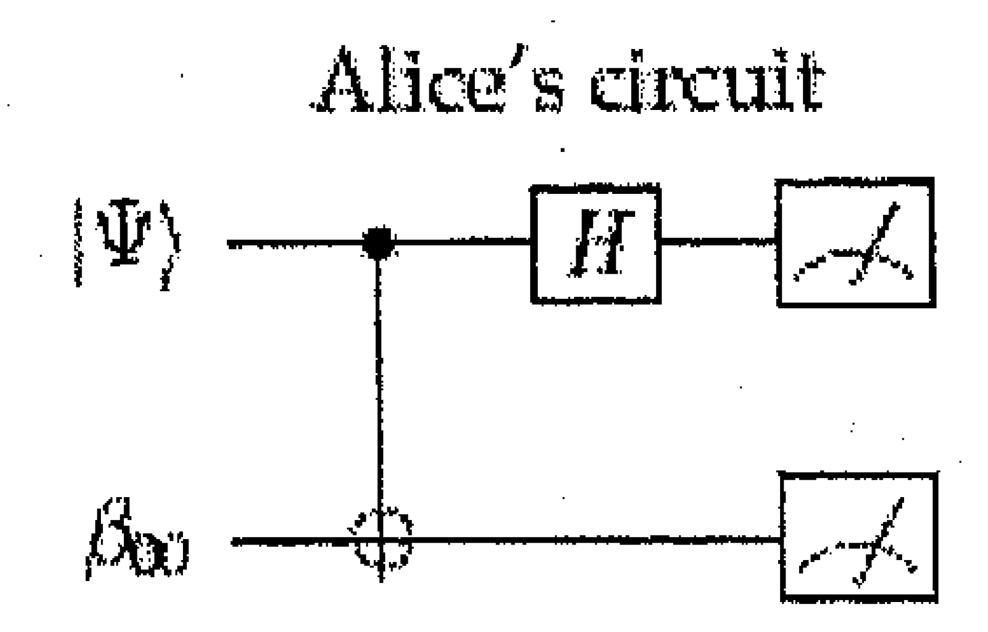
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)|0\rangle\rightarrow(H\otimes I)\rightarrow|10\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)|1\rangle\rightarrow(H\otimes I)\rightarrow|11\rangle$$

بإمكان بوب الآن قياس الكيوبتين في الأساس الحاسبي، و تكون النتيجة: القيمة التي أرادت أليس أن ترسلها.

4-7-6 دارة النقل Teleportation Circuit

بشكل أساسي هو عكس التشفير فائق الكثافة، أي أن التشفير فائق الكثافة يأخذ الحالة الكمية لبتين كلاسيكيين. أما النقل فيأخذ البتين الكلاسيكيين إلى حالة كمية واحدة.



$$\beta_{00} \text{ —} \boxed{I} \text{——— } |\Psi\rangle$$

$$\beta_{00} \text{ —} \boxed{X} \text{——— } |\Psi\rangle$$

$$\beta_{00} \text{ —} \boxed{Z} \text{——— } |\Psi\rangle$$

$$\beta_{00} \text{ —} \boxed{X} \text{—} \boxed{Z} \text{— } |\Psi\rangle$$

يختار بوب واحدة من الدارات الأربع التالية:

1. مثل التشفير فائق الكثافة؛ بداية يقوم كل من أليس و بوب بأخذ نصف زوج EPR، ولنقل أننا نبدأ ب β_{00}. هذا يعني أن لأليس الكيوبت الغامق في $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}0\rangle - |\mathbf{1}1\rangle)$ و لبوب الكيوبت الغامق في $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\mathbf{0}\rangle - |1\mathbf{1}\rangle)$. بعدها يقوم كلاهما بالابتعاد مسافة اختيارية.

2. أليس لديها كيوبت في حالة مجهولة

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

التي تتحد مع الكيوبت المتشابك الخاص بها.

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + |11\rangle\right)$$

هذا يعطي الحالة المتشابكة التالية (كيوبتات أليس غامقة):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\mathbf{00}0\rangle + \alpha|\mathbf{01}1\rangle + \beta|\mathbf{10}0\rangle + \beta|\mathbf{11}1\rangle)$$

3. بعدها تطبق أليس بوابة $CNOT$. هذا يشبه استخدام ($CNOT \otimes I$) على نظام الكيوبتات الثلاثة المتحدة؛ أي: شاملةً كيوبت بوب.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\mathbf{00}0\rangle + \alpha|\mathbf{01}1\rangle + \beta|\mathbf{11}0\rangle + \beta|\mathbf{10}1\rangle)$$

4. تطبق أليس بعد ذلك بوابة H على الكيوبت الأول الخاص بها والمراد نقلها(أو $H \otimes I \otimes I$ للنظام المتحد):

$$\frac{1}{2}\Big(\alpha\big(|000\rangle+|100\rangle+|011\rangle+|111\rangle\big)+\beta\big(|010\rangle-|110\rangle+|001\rangle-|101\rangle\big)\Big)$$

الآن نقوم بإعادة ترتيب الحالة لنحرك النطاقين α و β بحيث يكون بمقـدورنا قـراءة البتين الأولين تاركين الثالث في تراكب

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}|00\rangle\alpha|0\rangle+|10\rangle\alpha|0\rangle+|01\rangle\alpha|1\rangle+|11\rangle\alpha|1\rangle+|01\rangle\beta|0\rangle\\ -|11\rangle\beta|0\rangle+|00\rangle\beta|1\rangle-|10\rangle\beta|1\rangle\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}|\mathbf{00}\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|\mathbf{01}\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+\\ |\mathbf{10}\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|\mathbf{11}\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\end{pmatrix}$$

5. أليس الآن تقوم بإجراء قياسات على منزلتها لتحدد في أي من المنازل (الغامقة أعلاه) تكون الكيوبتات خاصتها، ثم تقوم بالربط بواسطة قناة كلاسيكية لما قامت بقياسه (أي: $|\mathbf{00}\rangle$ أو $|\mathbf{01}\rangle$ أو $|\mathbf{10}\rangle$ أو $|\mathbf{11}\rangle$) لبوب.

6. الآن يستخدم بوب بوابة (بوابات) X و/أو Z ليهنـدم الطـور(phase) و مرتبـة (order) نطاقات الاحتمال، (يختار بوابات وفق ما تخبره أليس). و هكذا النتيجـة: عـودة الكيوبت الأصلي.

البوابات الواجب على بوب استخدامها ملخصة على النحو التالي:

حالة **00** : $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\rightarrow I\rightarrow\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

حالة **01** : $\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle\rightarrow X\rightarrow\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

حالة **10** : $\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\rightarrow Z\rightarrow\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

حالة **11** : $\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle\rightarrow XZ\rightarrow\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$

8-4 واقعية بناء دارات The reality of Building Circuits

هناك نظرية عامة مفادها: أن أي عملية وحدوية على عدد n من الكيوبتات يمكـن أن تنجز باستخدام عمليات مجموعة مكونة من كيوبتين. هذه تشمل بوابات $CNOT$ وعمليـات بتات منفردة أخرى. إن هذه النتيجة تشبه النتيجة الكلاسيكية، وهـي أن أي اقتـران بـولي

Boolean function يمكن إنجازه باستخدام بوابات $NAND$. هذا مفيد لأننا في بعض الأحيان محددون بما نستطيع استخدامه لبناء دارة كمية.

هل باستطاعتنا بناء حاسب كمي قابل للبرمجة؟ هذا يعني حاسب كمي له معمارية architecture شبيه بمعمارية فون نيومان Von Neumann أو هارفارد Harvard architecture؟ الجواب لا! وهذا سببه:

إن المؤثرات الوحدوية المختلفة $U_n,\ldots,U_0$ تحتاج برامج متعامدة $|U_0\rangle,\ldots,|U_n\rangle$. وهذا يدعى: نظرية اللا برمجة no programming theorem.

إذا كان لدينا حاسب كمي قابل للبرمجة، عندها سيتكون "برنامجنا" من مؤثر وحدوي واحد أو أكثر، و حيث انه يوجد عدد لانهائي من هذه المؤثرات الوحدوية فسيكون مسجل البرنامج لانهائي الحجم (أي :مدخلاتنا التي يحتويها البرنامج).

4-9 المسلمات الأربعة لميكانيكا الكم

The Four Postulates of Quantum Mechanics

الآن نستطيع إلقاء نظرة على الفرضيات الأربعة بتفصيل أكثر مما ورد في فصل 2، بلغة الحوسبة الكمية.

4-9-1 الفرضية الأولى

للنظام المعزول فضاء متجه مركب مرافق يسمى: فضاء الحالة state space. سنستخدم فضاء حالة يسمى: فضاء هلبرت Hilbert space.

فضاء النظام الكمي يمكن أن يوصف بمتجه وحدة في هذا الفضاء يسمى: متجه الحالة.

مثال(4-16):

النظام الأبسط الذي نحن بصدد الاهتمام به هو كيوبت في $\mathbb{C}^2$.

الكيوبت هو متجه وحدة $|\Psi\rangle$ في $\mathbb{C}$. معظم الوقت سنرافق أساساً متعامداً-معيراً (مثل $\{|0\rangle,|1\rangle\}$).

الكيوبت الخاص بنا يمكن وصفه:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

α و β هنا يعرفان بأنهما سـعتي احتمـال probability amplitudes ، ونقـول أن الكيوبت يكون في تراكب كمي quantum superposition للحالة $|0\rangle$ و $|1\rangle$.

4-9-2 الفرضية الثانية

يمكن وصف تطور نظام معزول (مغلق) بتحويل وحدوي unitary transform وهـي صيغة مبسطة

$$|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle \tag{4.77}$$

أما الصيغة الشاملة للزمن:

إذا شملنا الزمن (مثل التفاعلات الكمية التي تحدث في زمن مستمر)

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle \tag{4.78}$$

t_1 و t_2 هما: نقطتان في الزمن، و $U(t_1, t_2)$ هي: مؤثر وحدوي يتغير مع الزمن.

يمكننا القول أيضا أن العملية عكوسية (reversible)، لأن:

$$U^{\dagger}U|\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{4.79}$$

تاريخ النظام الكمي لا يهم إذا ما وصف بشكل كلي باستخدام الحالة الحالية (هذه تعـرف بعملية ماركوف Markov process.

ملاحظة: نستطيع إعادة كتابة ما ذكر أعلاه بلغة معادلة شـرود نغـر Schrödinger's equation، ولكن ذلك ابعد من هدف هذه الورقة.

4-9-3 الفرضية الثالثة

وهذه تعالج ما يحدث إذا تم قياس $|\psi\rangle$ في أساس عمودي-معير orthonormal basis:

$$\{|O_1\rangle, |O_2\rangle, \ldots, |O_n\rangle\}$$

نقوم بقياس قراءة معينة j باحتمالية:

$$\Pr(j) = \left|\langle O_j|\psi\rangle\right|^2 \quad (4.80)$$

مثال(4-17):

إذا ما قمنا بالقياس بالأساس الحاسبي يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\Pr(0) &= \left|\langle 0|\psi\rangle\right|^2 \\ &= \left|\langle 0|\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right|^2 \\ &= |\alpha|^2 \\ \Pr(1) &= |\beta|^2\end{aligned}$$

بعد القياس يكون النظام في حالة O_j ، هذا لان القياس يشوش النظام.

إذا لم يكن $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ متعامدين (أي: $\langle u_1|u_2\rangle \neq 0$)، عندها لا يمكننا التمييز بينهما بدقة في القياس.

لنفرض أن لدينا نظاماً كمياً اكبر و الذي يتكون من اتحاد أنظمة اصغر؛ أي أن لدينا أساسا عمودياً-معيراً $A = \{|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$ حيث: n هو أبعاد A ، حينها يكون لدينا نظاما كميا اكبر B بحيث: $A \subset B$.

إذا قمنا بقياس A ، فما اثر ذلك على B ؟

يمكننا القول أن $|O_1\rangle, \ldots, |O_n\rangle$ هي جزء من أو تشمل واحد أو أكثر من الفضاءات الثانوية المتعامدة orthogonal subspaces $V_1, V_2, \ldots, V_n$ و التي تم ربطها بالطريقة التالية:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n \quad (4.81)$$

مثال(4-18):

متجه الحالة:

$$|\psi\rangle = \left(\alpha|O_1\rangle + \beta|O_2\rangle\right) + \gamma|O_3\rangle$$

يمكن كتابته:

$$V\left(|O_1\rangle, |O_2\rangle, |O_3\rangle\right) = V_1\left(|e_1\rangle, |e_2\rangle\right) \oplus V_2\left(|e_3\rangle\right)$$

$$\left(P_1, \ldots, P_m\right)$$

نبحث عنه (أي: كل شيء متعامد مع فضائنا الثانوي V).

مثال(4-19):

من المثال الأخير، المسقط P_1 على $V_1\left(|e_1\rangle, |e_2\rangle\right)$ يعطينا:

$$P_1\left(\alpha|e_1\rangle + \beta|e_2\rangle + \gamma|e_3\rangle\right) = \alpha|e_1\rangle + \beta|e_2\rangle$$

بشكل رسمي؛ إذا كان $\left(P_1, \ldots, P_m\right)$ مجموعة من المسقطات التي تغطي جميع الفضاءات الثانوية المتعامدة لفضاء الحالة، فبعيد قياس $|\psi\rangle$ يكون لدينا:

$$\Pr(j) = \langle\psi|P_j|\psi\rangle \tag{4.82}$$

تاركا النظام في حالة القياس اللاحقة:

$$\frac{P_j|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_j|\psi\rangle}} \tag{4.83}$$

مثال(4-20):

لدينا الكيوتريت (qutrit) (الأرقام الثلاثية الكمية) التالية:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$$

$$_2\left(|2\rangle\right) \qquad _1\left(|0\rangle, |1\rangle\right)$$

$$\begin{aligned}\Pr(1) &= \langle\psi|P_1|\psi\rangle \\ &= \left[\alpha^*\beta^*\gamma^*\right]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{bmatrix} \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2\end{aligned}$$

$$\Pr(2) = \langle\psi|P_2|\psi\rangle$$
$$= [\alpha^* \beta^* \gamma^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$$
$$= |\gamma|^2$$

لذا فإنها مفصولةً تبدو هكذا:

$$|\psi_1\rangle = \frac{P_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_1|\psi\rangle}}$$
$$= \frac{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{P_2|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_2|\psi\rangle}}$$
$$= \frac{\gamma|2\rangle}{\sqrt{|\gamma|^2}}$$

بشكل أكثر أهمية؛ نستطيع النظر إلى القياس لمجموعة من الكيوبتات، المثال الآتي يستخدم الضرب الممتد (tensor product) والذي هو أيضا جزء من المسلمة الرابعة.

إذا كان النظام سيقاس بالأساس $\{|O_1\rangle, |O_2\rangle\}$ عندئذ نستخدم المسقط بضرب ممتد مع I على الكيوبت الذي لا نريد قياسه. مثال: نستخدم $(I \otimes P_2)$ للكيوبت الثاني ل $|O_2\rangle$:

مثال(4-21):

إذا كان:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

لقياس الكيوبت الأول في الأساس الحاسبي، لدينا $|0\rangle$ بالاحتمال:

$$\Pr(0) = \langle\psi|P_0 \otimes I|\psi\rangle$$
$$= (\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle) \bullet (\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle)$$
$$= |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$$

هناك نوع آخر من القياس يسمى: قياس المؤثر موجب القيمة POVM (Positive Operator Valued Measure) ويكون لمسقطات من نوع خاص. POVM ابعد من هدف هذا النص.

4-9-4 الفرضية الرابعة

يصف الضرب الممتد tensor product لمركبات نظام فيزيائي مركب هذا النظام، لذا؛ فان فضاءات الحالة لأنظمة مفردة تتحد بحيث:

$$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n^2} \qquad (4.84)$$

مثال(4-22): $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^{16}$ يمكن تمثيلها:

$$(|\psi_A\rangle = |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \otimes (|\psi_B\rangle = |a\rangle + |b\rangle + |c\rangle + |d\rangle)$$

ويمكن كتابته هذه:

$$|\psi_{AB}\rangle = |1a\rangle + |1b\rangle + |1c\rangle + \ldots + |4d\rangle$$

مثال(4-23):

إذا كان لدى أليس $|\psi_A\rangle = |u\rangle$، ولدى بوب $|\psi_B\rangle = |v\rangle$، إذا اتحد نظاماهما فان الحالة المشتركة# تكون:

$$|\psi_{AB}\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle$$

$$I \otimes U$$

المشتركة.

مثال(4-24):

لدينا التالي:

$$|\psi\rangle = \sqrt{0.1}|00\rangle + \sqrt{0.2}|01\rangle + \sqrt{0.3}|10\rangle + \sqrt{0.4}|11\rangle$$

بعدئذٍ:

$$|\psi\rangle \to (I \otimes X) \to |\psi\rangle = \sqrt{0.1}|01\rangle + \sqrt{0.2}|00\rangle + \sqrt{0.3}|11\rangle + \sqrt{0.4}|10\rangle$$

$$|\psi\rangle \to (X \otimes I) \to |\psi\rangle = \sqrt{0.1}|10\rangle + \sqrt{0.2}|11\rangle + \sqrt{0.3}|00\rangle + \sqrt{0.4}|01\rangle$$

الفصل الخامس

نظرية المعلومات Information Theory

5-1 المقدمـــــــــــــــة

تتناول نظرية المعلومات الطرق التي يمكن من خلالها تمثيل المعلومات وتحويلها بشكل كفء. هذه المعلومات يمكن تمثيلها بعدة طرق مختلفة لوصف نفس المعنى. على سبيل المثال قولنا "كيف حالك" أو " How are you" أو"comment allez von" جميع هذه العبارات لها نفس المعنى. كل الطرق المعروفة لتمثيل هذه المعلومات يجب أن يكون لها وسط فيزيائي إبتداءا من الحبر على الورق إلى وحدات الخزن المغناطيسية والالكترونية. هذه المعلومات التي تخزن في وسط فيزيائي معين لا تصبح ملاصقة لذلك الوسط فقط بل يمكن تحويلها من شكل لآخر. إذا اعتبرنا أن المعلومات على هذا النمط فإنها تصبح خاصية كالطاقة التي يمكن تحويلها من نظام فيزيائي إلى آخر.



الشكل(5-1): بول وشانون.

نحن نرغب في التعامل مع المعلومات الكمية، والتي لها العديد مما يوازيها في نظرية المعلومات المألوفة. نظرية المعلومات المألوفة تستند بشكل كبير على النظرية الكلاسيكية للعالم Claude E.Shannpn 1916-2001 (الشكل 5-1). هناك عدد من المؤلفات الكمية لمختلف أجزاء نظريته الكلاسيكية. سنلقي نظرة في هذا الفصل على العناوين الأخرى المرتبطة مثل تصحيح الخطأ الكمي quantum error correction والكربتوجرافي الكمي quantum cryptography . كذلك، وكما وعدناكم، هناك بند يتناول بشكل عميق حالات بيل Bell

states لينتهي الفصل مع بعض الأسئلة المفتوحة على طبيعة المعلومات والطرق البديلة للحوسبة.

2-5 تاريخ History

يمكننا القول أن تاريخ نظرية المعلومات بدأ باختراع الجبر البوليني Boolean algebra في سنة 1847 من قبل George Boole 1815-1864 (الشكل 6-1). لقد أدخل الجبر البوليني مفهوم استخدام العمليات المنطقية (مثل AND و OR و NOT) على نظام الأعداد الثنائية. أما نقطة الارتكاز اللاحقة فكانت سنة 1948 عندما كتب شانون"النظرية الرياضية للاتصالات" التي وضع فيها الخطوط العريضة لمفهوم انتروبيا شانون (انظر للبند 6-5-1). لقد أوضح شانون إمكانية استخدام جبر بولين لتمثيل المرحلات relays ، المفاتيح switches، ومركبات أخرى في الدارات الالكترونية. كذلك فقد عرف الوحدة الأساسية لنظرية المعلومات وهي البت bit.

3-5 نموذج الاتصالات لشانون Shannon's Communication Model

لكي نوصف عملية إرسال المعلومات من مصدر لمستهلك بشكل رسمي فإننا نستطيع استخدام نموذج الاتصالات لشانون الموضح في الشكل(5-2). يمكن وصف أجزاء هذا النموذج كما يلي:

الشكل(5-2):نموذج الاتصال لشانون

- المصدر Source: وهو أصل الرسالة والذي له معنى رسمي(انظر البند 6-4). والرسالة ترسل من المصدر بصيغتها الصفية.
- المرسل Transmitter: وهو يشفر ومن الممكن أن يضغط الرسالة النقطية التي تصبح عندها الرسالة إشارة واتلي تنقل من المرسل إلى المستلم.

- مصدر الضجيج Source of Noise : إن مصدر الضجيج يمكن أن يدخل ضجيجا عشوائيا في الإشارة وبالتالي يشوهها.
- المستلم Receiver: يمكن لهذا المستلم أن يزيل التشفير وإزالة الضغط من الإشارة ليرجعها إلى الرسالة الأصلية.

5-3-1 سعة القناة Channel Capacity

يتم اختيار رسالة من مجموعة من جميع الرسائل الممكنة وترسل. كل رمز منقول يأخذ زمنا معينا (الذي يسمى سعة القناة).

إن الاسم الذي أعطاه شانون لسعة القناة على قناة ثنائية هو "بت واحدة لفترة زمنية" على سبيل المثال 56,000 بت بالثانية. لقد عبر عن السعة بالعلاقة التالية:

$$C = \lim_{T\to\infty} \frac{\log_2 N}{T} \qquad (5.1)$$

حيث N هو عدد الرسائل الممكنة التي طولها T.

مثال(5-1) : لثنائي لدينا

2 بتات = اربع رسائل مختلفة في فترتين زمنتيين.

4 بتات = ثمانية رسائل مختلفة في ثلاثة فترات زمنية.

وعليه

$$N(T) = 2^T$$

$$C = \frac{\log_2 N}{T}$$
$$= 1 \text{ bit per time period.}$$

مثال(5-2) : مثال آخر هو شفرة المورس، حيث تأخذ الفراغات فترة أطول من النقـــاط عند بثها. فإذا رمز للفراغات بالثنائي 1110 وللنقطة 10 فيكون لدينا

C=0.34 bit per time period.

4-5 مصادر المعلومات الكلاسيكية Classical Information Sources

ينتج مصدر معلومات مجموعة محددة من الرموز من أبجدية معينة. الأبجدية التي غالبا ما تستخدم هي الثنائي (0 و 1) ولكن من الناحية المبدئية فإن ذلك يمكن أن يكون أي سلسلة من الرموز. والطريقة التي يمكن بواسطتها نمذجة المعلومات هي من خلال احتمالية إنتاج أحرفا معينة أو مجموعة من الأحرف المربوطة (الكلمات) بواسطة مصدر معين. كمثال على توزيع الاحتمالية هذه هو إذا أعطي احدنا كتابا غير معروف فيمكنه، من حيث المبدأ، أن يتنبأ بدرجة معينة من الدقة تردد الكلمات والأحرف داخل الكتاب.

5-4-1 مصادر المعلومات المستقلة Independent Information Sources

مصدر المعلومات المستقل والتوزيع المثالي (IID) هو مصدر معلومات يكون فيه كل خرج مستقلا عن المخرجات الأخرى من المصدر، إضافة إلى ذلك فإن كل خرج لـه نفس احتمالية الحدوث كل مرة ينتج فيها.

إن IID هو مصدر معلومات مع أبجدية(أي مجموعة من الرموز أو الأحرف a_i)

$$A=\{a_1,\ldots,a_n) \qquad (5.2)$$

باحتمالات $pr(a_1), pr(a_2),\ldots\ldots,pr(a_n)$ بحيث

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{pr}(a_i) = 1 \text{ where } 0 \le pr(a_i) \le 1 \;\; \forall\, i. \qquad (5.3)$$

هذا المصدر سوف ينتج حرفا باحتمالية $\mathrm{pr}(a_i)$ بدون اعتمادية على الرموز السابقة. مصادر المعلومات المستقلة كذلك مصادر المعلومات صفرية الذاكرة zero memory information sources (أي أنها تطابق عملية ماركوف Markov process)

مثال(5-2): قطعة نقود منحازة هي مثال جيد على IID. قطعة النقود المنحازة لها احتمالية p للكتابة واحتمالية p-1 للصورة. إذا أعطينا لغة $\Sigma = \{\text{heads}, \text{tails}\}$ فإن:

$$\text{pr(heads)} = 0.3,$$
$$\text{pr(tails)} = 0.7\,.$$

إذن 70% من الزمن تكون القطعة على الصورة.

بصراحة، تصح نتائج شانون لمجموعة جزئية من مصادر المعلومات التـــي conform التالي :

1. ليس هناك العديد من المصادر التامة يجب اختيار الرموز باحتمالات ثابتة ، واحـــدة من دون الاعتماد على الرموز الجارية و الاختيارات السابقة .
2. مصدر معلومات يجب أن يكون مصدر ergodic. و هذا يعني بأنـــه يجـــب أن لا يكون هناك اختلاف إحصائي (باحتمالية 1) بين المصادر الممكنة . أي أن جميع الأنظمـــة يجب أن يكون لها نفس الاحتمالات للحروف كي تظهر في أبجدياتها .

ليست كل المصادر تامة مثل أعلاه. و السبب هو على سبيل المثال كتاب فيه ارتباطـــات بين مفردات المنهج ، الكلمات ..... الخ (ليس فقـــط الحـــروف) مثـــل "he" و "wh" . نستطيع قياس أنواع معينة و يصبح المصدر مشابه أكثر إلى IID. اقترح شانون بأن معظـــم مصادر المعلومات يمكن أن تُقرب.

5-5 الانضغاط والزيادة الكلاسيكية Classical Redundancy Compression

انضغاط المعلومات يعني استخدام معلومات أقل لتمثيل رسالة و إعادة تركيبهـــا بعـــد إرسالها. عندما نتكلم عن الانضغاط في هذا البند نعني خوارزمية انضغاط بسيطة التي يمكن أن تطبق على كل مصادر المعلومات. وهذا يختلف عن القول، تغيير النص في جملة لنقـــل نفس المعنى أو استخدام تقنيات خاصة للعمل على جزء من الرسائل أو مصادر المعلومـــات فقط (مثل استخدام قاعدة بسيطة لتمثيل دقيق لصورة كرة).

غالبا ما نتكلم عن استخدام شفرة K لتمثيل رسالتنا رسميا. الشفرة هي دالة تأخذ أبجدية مصدر A إلى أبجدية شفرة B أي أن $K: A \rightarrow B$. لأي رمز a في اللغةA، تكون K(a) كلمة بحروف منB.

يمكن إيجاد كلمة $w=a_1a_2....a_n$ في A بواسطة

$$K(w) = K(a_1)K(a_2)\dots K(a_n). \quad (5.3)$$

مثال(5-3): شفرة بسيطة

$$A = \{A, B, C, D\},$$
$$B = \{0, 1\}.$$

فك التشفير يكون:

$$A \to 0001,$$
$$B \to 0101,$$
$$C \to 1001,$$
$$D \to 1111.$$

و عليه فقد فككنا الكلمة ABBA كما في

K(ABBA)=0001 0101 0101 0001

طول الشفرة Length of Codes

نعرف حجم أبجدية A كما في $|A|$ و طول كلمة w يمكن أن يبين بهذا الشكل $|w|$.

مثال(5-4): $|A|$ and $|w|$.

$$A = \{a, b, c, d, e, f\},$$
$$B = \{0, 1, 2\}.$$

فك الشفرة الممكن هو

$$a \to 0,$$
$$b \to 1,$$
$$c \to 20,$$
$$d \to 220,$$
$$e \to 221,$$
$$f \to 222.$$

سنحصل على

$$|K(a)|=1, |K(c)|=2, |K(f)|=3, |A|=6, |B|=3.$$

5-5-1 نظرية التشفير عديمة الضجيج لشانون Noiseless Coding Theore

لقد عرض شانون بأن هناك حد معرف للمدى الـذي يمكـن أن يـضغط فيـه مـصدر معلومات. انتروبيا شانون H(S) هو أقل عدد بتات نحتاجها لنقل رسالة. لمـصدر يـرتبط الانتروبيا بتسفير أقصر معدل طول $L_{\min}(s)$ بواسطة:

$$H(S) \leq L_{min}(S) < H(S) + 1. \qquad (5.5)$$

نستطيع إيجاد انتروبيا شانون، لتوزيع مصدر معين مقاس بالبتات بالعلاقة:

$$H(X) = -\sum_i \mathrm{pr}_i \log_2 \mathrm{pr}_i . \qquad (5.6)$$

حيـــــث $\log_2$
(لوغاريتم للأساس 2) يعني أن انتروبيا شانون يقاس بالبتات. و Pr_i هو مقياس للاحتماليـة (أي للتردد الذي تبعث به) لرمز يولد مـن مـصدر والتجميـع هـو جمـع علـى رمـوز i=1,2,3........n المولدة بواسطة المصدر.

مثال(5-5): المصادر المعتمدة والعشوائية Random and dependent sources

العشوائية: يتم اختيار كل رمز من المصدر بشكل عشوائي تماما(بحيث أن احتماليـة A وB متساوية)بدون اعتماد، هذا المصدر غير قابل للانضغاط مع انتروبيا شانون الذي يستخدم بت واحد لكل رمز.

الاعتمادية: كل رمز ثاني هو نفس السابق تماما، الذي يختار عشوائيا(على سبيل المثـال AABBBBAABB). هذا له انتروبيا شانون مقداره نصف بت لكل رمز.

مثال(5-6): لدينا اللغة $\{A,B,C,D,E\}$ من رموز تحدث بالتردد التالي

$$A=0.5, B=0.2, C=0.1, D=0.1, E=0.1 .$$

الانتروبيا هو

$$\begin{aligned} H(X) &= -[(0.5\log_2 0.5 + 0.2\log_2 0.2 + (0.1\log_2 0.1) \times 3)] \\ &= -[-0.5 + (-0.46438) + (-0.9965)] \\ &= -[-1.9] \\ &= 1.9. \end{aligned}$$

لذلك نحتاج 2 بت لكل رمز لنقل الرسالة.

تدرك القيمة الدنيا للانتروبيا عندما ينتج مصدر معلومات حرف واحد بشكل دائم، هذا يعطينا احتمالية 1 لذلك الحرف. أما القيمة العظمى للانتروبيا فتدرك عندما لا يكون لدينا معلومات عن توزيع الاحتمالية لأبجدية المصدر (عندما تكون الرموز متساوية احتمالية الحدوث).

حالة خاصة للانتروبيا هي الانتروبيا الثنائي المصدر له رمزين فقط باحتماليتين p و P-1 مثل نقر قطعة النقود على سبيل المثال. لاحظ أن نقر القطعة باعتدال له انتروبيا أعظم وهو واحد بت أما النقر من غير اعتدال قطعة نقود موزونة بحيث تصعد كتابة أو تصعد صورة لها انتروبيا أقل ما يمكن وهو صفر بت.

2-5-5 مصادر المعلومات الكمية Quantum Information Sources

لقد أعطانا انتروبيا شانون الحد الأدنى عن عدد البتات التي نحتاجها لخزن قطعة من المعلومات. السؤال هو، هل هناك أي فرق عندما نستخدم الحالات الكمية؟ الجواب هو نعم إذا استخدمنا مبدأ التراكب.

إذا كانت البتات الكمية المشمولة في حالات معرفة جيدا (مثل $|0\rangle$ و $|1\rangle$) نقرة قطعة نقدية شبه كلاسيكية تعطينا

$|0\rangle$ with probability of $\frac{1}{2}$,
$|1\rangle$ with probability of $\frac{1}{2}$,

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

إذا استبدلنا واحدة من هاتين الحالتين بتراكب فغن "نقرة قطعة النقود الكمية" تعطينا

$|0\rangle$ with probability of $\frac{1}{2}$,
$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ with probability of $\frac{1}{2}$,

$$H\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right) = 0.6\ .$$

أحسن من معدل شانون.

بشكل عام مصدر معلومات كمي ينتج حالة: $\left|\Psi_j\right\rangle$ باحتمال Pr(j) ، وضغطنا الكمي ينجز أحسن من معدل شانون H(Pr(j)).

3-5-5 الحالات النقية والمختلطة Pure and Mixed States

يقال عن نظام كمي أنه في حالة نقية إذا عرفت حالته جيدا. وهذا لا يعني بأن متجه الحالة سوف يسقط دائما لقيمة معروفة، لكن على الأقل يكون متجه الحالة معروفا بأنه مختلف عن ما يسقط عليه. على سبيل المثال إذا أعطيت فوتون ومستقطب فان الفوتون يمكن أن يكون في ثلاث حالات: أفقي(H) ورأسي(V) وقطري(D). إذا جعلنا فوتوننا قطريا عند زاوية 45 درجة عندئذ يكون لدينا تراكب متساوي للأفقيH والرأسيV .

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{H}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{V}\rangle.$$

والآن إذا قمنا بقياس الاستقطاب لدينا فرصة 50% لكشف $\left|H\right\rangle$ أو 50% لكشف $\left|V\right\rangle$. الحالة معرفة جيدا قبل القياس، لذلك نسميها نقية (أي أن لدينا زاوية استقطاب معرفة جيدا نعني 45 درجة. وإذا قمنا بالقياس باستخدام مستقطب بهذا الاتجاه فإن النتيجة مؤكدة). لا نحصل على هذا الوضع إذا لم يكن هناك اتجاه تكون فيه النتيجة مؤكدة. وعليه فالحالة هي الآن غير معروفة جيدا ونسميها حالة مختلطة(ممزوجة). على سبيل المثال، إذا كان لدينا عدد من الفوتونات، 50% منها مستقطب أفقيا و 50% رأسيا، فلدينا الآن حالة ممزوجة. كل فوتون له حالة معروفة جيدا $\left|H\right\rangle$ أو $\left|V\right\rangle$، ولكن ليست الزمرة. هذا الوضع لا يمكن تمييزه عن فوتون يكون في حالة تشابك.

عندما تتأثر أنظمة كمية بأنظمة خارجية فإن حالاتنا النقية يمكن أن تصبح متشابكة مع العالم الخارجي، فتصبح لدينا حالات مزيجة. وهذا يسمى إزالة التشاكه decoherence، أو في مصطلحات نظرية المعلومات، ضجيج noise .

من الممكن أن يكون لدينا حالة (نقية) معرفة جيدا مكونة من أنظمة جزئية في حالات مزيجة. الحالات المتشابكة مثل حالات بيل معرفة جيدا لنظام مركب (كلي)، لكن حالة كل بت كمي مركب غير معرفة جيدا، أي أنها مزيجة.

4-5-5 نظرية التشفير عديمة الضجيج الكمية لسكوما جر

Schumacher's Quantum Noiseless Coding theorem

ما يماثل نظرية التشفير عديمة الضجيج لشانون في الكم هي نظرية التشفير عديمة الضجيج الكمية لسكوماجر والتي هي كما يلي:

أحسن معدل بيانات R قابل للإنجاز هو $S(\rho)$ حيث S هو انتروبيا Von Neumann و ρ هي مصفوفة الكثافة density matrix . تمسك ρ معلومات مكافئة للحالة الكمية ψ. ويمكن صياغة الميكانيك الكمي بدلالة ρ كبديل عن ψ. أما الآن فنلقي نظرة على ρ.

مصفوفة الكثافة The density matrix

عند دراسة الضجيج الكمي يصبح من الأسهل العمل مع مصفوفة الكثافة بدلا من متجه الحال(فكر بها كأداة فقط، لا كمركبة ضرورية للحوسبة الكمية).

هناك ثلاث طرق رئيسية لمصفوفة الكثافة، وجهة نظر المجموعة، الأنظمة الجزئية والطرق الأساسية. نوصفها بشكل موجز أدناه.

المجموعة Ensemble: هذه هي وجهة النظر الأساسية لمصفوفة الكثافة التي تعطينا قياس إحصائي بهيئة مضغوطة.

النظام الجزئي Subsystem: إذا عشق نظام كمي A مع نظام كمي آخر B فإننا لا نستطيع دائما إعطاء Aمتجه حال عليه نفسه(ليس معرفا بشكل جيد)، لكن نستطيع تعيين مصفوفة كثافة منفردة لكل نظام جزئي.

الأساس Fundamental: من الممكن إعادة نص الفرضيات الأربع للميكانيك الكمي بدلالة مصفوفة الكثافة. على سبيل المثال، كما ذكر أعلاه، نستطيع ملاحظة الإحصاءات المتولدة بواسطة فوتون متشابك كمكافئ للمجموعة المطابقة.

وجهة نظر المجموعة Ensemble point of view

تأمل تجمع من أنظمة كمية متماثلة في حالات باحتمالات Pr_j . احتمالية الناتج k عندما يقاس، والتي توصف بالرمز P_k تكون:

$$k = \mathrm{tr}(\rho P_k) \qquad (5.7)$$

حيث

$$\rho = \sum_j \mathrm{pr}_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \qquad (5.8)$$

هي المصفوفة. أن ρ تحسب، بشكل كامل إحصاء القياس. إن مجموعة كل الاحتمالات ومتجهات الحال المرافقة لها $\{\mathrm{pr}_j, |\psi_j\rangle\}$ تسمى مجموعة الحالات النقية. إذا تم أخذ قياس، مع مساقط P_k على نظام ذو مصفوفة كثافة ρ فإن القياس الأولى لمصفوفة الكثافة ρ_k هو

$$\rho_k = \frac{P_k \rho P_k}{tr(P_k \rho P_k)} \, . \qquad (5.9)$$

كمثال بسيط يشمل الاحتمالات لكيوبت في حالة معرفة هو التالي:

مثال(5-7): لكيوبت مفردة في الأساس $\{|0\rangle, |1\rangle\}$، لدينا

$$\rho = \sum_{j=1}^{2} pr_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| .$$

للحالة $|\Psi\rangle = 1 \cdot |0\rangle + 0 \cdot |1\rangle$ أي أن احتمالات قياس $\mathrm{pr}(|0\rangle) = 1$ و $\mathrm{pr}(|1\rangle) = 0$

$$\rho = 1 \cdot |0\rangle\langle 0| + 0 \cdot |1\rangle\langle 1|$$
$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

وللحالة

أي أن احتمالات القياس $\mathrm{pr}(|0\rangle) = 0$ و $\mathrm{pr}(|1\rangle) = 1$

$$\rho = 0 \cdot |0\rangle\langle 0| + 1 \cdot |1\rangle\langle 1|$$
$$= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

لاحقا سنلقي نظرة على كيوبت في حالة غير معرفة، واستخدام الأثر على مصفوفة كثافة لمسقط معطى.

مثال(5-8): إذا أعطيت احتمالات قياس $\mathrm{pr}(|0\rangle) = p$ و $\mathrm{pr}(|1\rangle) = 1 - p$، فإن

$$\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$$
$$= p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-p) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 - p \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}.$$

وعليه، فإذا أعطيت مصفوفة كثافة ρ ومسقط $P = |0\rangle\langle 0|$ فإنك تستطيع الحصول على الاحتمالية النهائية من ρ، لنقل أننا نقيس في عندئذ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}(|0\rangle) &= \mathrm{tr}(\rho|0\rangle\langle 0|) \\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= p + 0 \\
&= p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}(|1\rangle) &= \mathrm{tr}(\rho|1\rangle\langle 1|) \\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}\right) \\
&= 0 + (1-p) \\
&= 1 - p.
\end{aligned}$$

كيف تتطور مصفوفة كثافة؟ لنفرض أن تحويلا أحاديا U طبق على نظام $U|\Psi\rangle$ كمى أي ، ما هي مصفوفة الكثافة الجديدة؟ لإجابة على هذا السؤال، باستخدام وجهة نظر المجموعة، نستطيع القول أنه إذا كان النظام يمكن أن يكون في الحالة $|\Psi_j\rangle$ باحتمالات tr_j عندئذ، بعد حدوث التطور، فإنه يكون في حالة $U|\Psi\rangle$ باحتمال Pr_j.

ابتداء لدينا $\rho = \sum_j \mathrm{pr}_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. وعليه، فبعد تسليط U ، لدينا

$$\begin{aligned}\rho' &= \sum_j \mathrm{pr}_j U|\psi_j\rangle\langle\psi_j|U^\dagger \\ &= U\left(\sum_j \mathrm{pr}_j U|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)U^\dagger \\ &= U\rho U^\dagger.\end{aligned} \tag{5.10}$$

لاحظ أنه عندما تذهب إلى $U|\psi_j\rangle$ فإن $\langle\psi_j| = |\psi_j\rangle^\dagger$ تذهب إلى $(U|\psi_j\rangle)^\dagger = \langle\psi_j|U^\dagger$.

مثال(5-9): إذا أعطينا احتمالية قياس $\mathrm{pr}(|0\rangle) = p$ و $\mathrm{pr}(|1\rangle) = 1 - p$ فإن:

$$\rho = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}$$

إذا سلط X على ρ فعندئذ:

$$\begin{aligned}\rho' &= X\rho X \\ &= \begin{bmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ لدينا $\mathrm{pr}(|00\rangle) = \frac{1}{2}$ و $\mathrm{pr}(|11\rangle) = \frac{1}{2}$. هذا يعطينا ما يسمى بالحالة المزيجة تماما و $\rho = \frac{I}{2}$. عليه

$$\begin{aligned}\rho' &= U\frac{I}{2}U^\dagger \\ &= \frac{I}{2} \text{ because } UU^\dagger = 1\end{aligned}$$

مميزات

$tr(\rho) = 1.$

ρ is a positive matrix.

5-5-5 وجهة نظر النظام الجزئي Subsystem point of View

يمكن لمصفوفة الكثافة أن تصف أي نظام جزئي من نظام كمي أكبر، من ضمنها الأنظمة الجزئية المزيجة. الأنظمة الجزئية الموصوفة بمصفوفة الكثافة المختزلة reduced density matrix . إذا كان لدينا نظامان جزئيان A و B من نظام C حيث $A \otimes B = C$. فإن مصفوفات الكثافة للأنظمة الجزئية هي ρ^A و ρ^B ومصفوفة الكثافة الكلية هي ρ^C (كذلك فيشار لها ρ^{AB}). نستطيع تعريف ρ^A و ρ^B كما يلي:

$$\rho^A = \mathrm{tr}_B(\rho^C) \text{ and } \rho^B = \mathrm{tr}_A(\rho^C). \quad (5.11)$$

حيث أن tr_A و tr_B يسميان الآثار الجزئية على الأنظمة A و B على التوالي. يعرف الأثر الجزئي كما يلي:

$$\rho^A = tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad (5.12)$$
$$= \langle b_1|b_2\rangle |a_1\rangle\langle a_2|.$$

لقد ذكرنا سابقا الفرق بين الحالات النقية والمزيجة. هناك اختبار بسيط لحساب هل أن حالة معينة مزيجة أو نقية، والذي هو إجراء الأثر على تلك الحالة، إذا حصلنا على $\mathrm{tr}(\rho^2) < 1$ فإن الحالة مزيجة ($\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ للحالة النقية). إن حالات بيل على سبيل المثال لها حالة مربوطة نقية بحيث $\mathrm{tr}((\rho^C)^2) = 1$ ، لكن لها حالات جزئية مزيجة، أي أن $\mathrm{tr}((\rho^A)^2) < 1$ و $\mathrm{tr}((\rho^B)^2) < 1$.

6-5-5 وجهة النظر الأساسية Fundamental Point of View

بدلالة مصفوفة الكثافة تكون الفرضيات الأربعة للميكانيك الكمي كما يلي:

1- بدلا من استخدام متجه الحال، نستطيع استخدام مصفوفة كثافة لوصف نظام كمي في فضاء هلبرت. إذا كان نظام ما في حالة ρ_j باحتمال Pr_j فله مصفوفة كثافة $\sum_j \mathrm{Pr}_j \rho_j$.

2- التغيرات في نظام كمي توصف بالعلاقة التالية: $\rho \to \rho' = U\rho U^\dagger$.

3- القياس باستخدام المساقط P_k يعطينا k باحتمالية $tr(P_k\rho)$ تاركا النظام في حالة قياس أولية مقدارها:

$$\rho_k = \frac{P_k \rho P_k}{\mathrm{tr}(P_k \rho P_k)}$$

4- الضرب الممتد يعطينا حالة نظام مركب. حالة نظام جزئي يمكن إيجادها بعمل أثر جزئي على باقي النظام (أي على الأنظمة الجزئية الأخرى المكونة للنظام).

7-5-5 انتروبيا فون نيومان Von Newmann Entropy

إن توزيعات الاحتمالية في انتروبيا شانون الكلاسيكي H ، قد استبدلت بمصفوفة الكثافة ρ في انتروبيا نيومان S:

$$S(\rho) = -tr(\rho \log_2 \rho). \qquad (5.13)$$

نستطيع كذلك تعريف الانتروبيا بدلالة القيم المميزة λ:

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \qquad (5.14)$$

حيث λ_i هي القيم المميزة للمصفوفة ρ .

إذا أردنا تعريف اللادقة لحالة كمية قبل القياس نستطيع استخدام الانتروبيا، بمعرفة فضاء هلبرت بأبعاد d فإن

$$0 \leq S(\rho) \leq \log_2 d \qquad (5.15)$$

حيث $S(\rho)=0$ تعني حالة نقية و $S(\rho)=\log_2 d$ تعطينا حالة مزيجة تماما. على سبيل المثال نستطيع مقارنة حالتين، وذلك بقياس انتروبيا فوننيومان لهما وحساب فيما إذا كانت واحدة منهما متشابكة أكثر من الأخرى. كذلك فإننا نستخدم انتروبيا نيومان لتعريف الحدود النهائية لانضغاط البيانات الكمية نعني انضغاط Schumacher ، الذي هو بعيد عن التناول في هذا الكتاب.

الصفات:

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B).$$
$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B).$$
$$S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|.$$
$$S(\rho_A) = -\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A).$$
$$S(\rho_B) = -\mathrm{tr}(\rho_B \log_2 \rho_B).$$
$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}).$$
$$\rho_B = \mathrm{tr}_A(\rho_{AB}).$$
$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B.$$
$$S(A) + S(B) \leq S(AC) + S(BC).$$
$$S(ABC) + S(B(\leq S(AB) + S(BC).$$

$S(A) + S(B) \leq S(AC) + S(BC)$ للوضع يصبح لانتروبيا شانون طالما أن $H(A) \leq H(AC)$ و $H(B) \leq H(BC)$ فإننا نحصل على فائدة مع انتروبيا فونيومان مع

$$S(A) > (AC)$$

أو

$$S(B) > S(BC).$$

يجب ملاحظة أن الميكانيك الكمي يقول لنا أن (6.32) و (6.33) لا يمكن أن يصحا آنيا.

5-6 الضجيج وتصحيح الخطأ Noise and Error Correction

5-6-1 القنوات الضجيجية Noisy Channels

الضوضاء هي العشوائية في قناة. ولكي نقاتل الضجيج علينا استخدام زيادة في المعلومات أي أننا نرسل معلومات إضافية لتحييد الضجيج. في حالة القناة الثنائية نستخدم التكرار. على سبيل المثال نستطيع استخدام ثلاث أرقام واحد لتمثيل 1 مفرد، بتلك الطريقة

اثنان من البت يجب أن ينقلبا لإنتاج خطأ. كمثال على هذا فإن 011 يمكن أن يساوي 1. إذا كان انقلاب بتين غير محتمل عندئذ فباستلام 011 سنفرض (بدقة عالية) أن 1 أرسل (على شكل 111) وإن بت مفردة قد انقلبت. التكرار ليس كفء لجعل احتمالية الخطأ تحدث بشكل أقل، فإن تشفيرات أطول مطلوبة والتي تريد من زمن البت. لقد وجد شانون طريقة أفضل:

"بفرض وجود قناة ضجيجية هناك معدل مميز R بحيث أن أي مصدر معلومات بانتروبيا أقل من R يمكن أن يشفر بحيث يبث عبر القناة بأخطاء قليلة اعتباطية، فوق R نحصل على أخطاء وعليه فإذا لم يكن هناك ضجيجا فإن R تقابل سعة القناة C.

5-6-2 تصحيح الخطأ الكلاسيكي Classical Error Correction

سنتأمل مستخدمين قناة متناظرة ثنائية باحتمالية خطأ P حيث P≤0.5 وإنه:

- إذا أرسلت 0، فإن 0 تستلم باحتمالية P-1 .
- إذا أرسلت 0، فإن 1 تستلم باحتمالية P.
- إذا أرسل 1، فإن 1 يستلم باحتمالية P-1 .
- إذا أرسل 0، فإن خ يستلم باحتمالية P.

بشكل عام نحن نستخدم عدد أكبر من البتات مقارنة بالرسالة الأصلية لتشفيرها بكلمات شفرة. نسمي هذا تشفير قناة k_x ، حيث x هي عدد البتات المستخدمة لتشفير الرسالة الأصلية.

إذا كانت لدينا شفرة K (تسمى شفرة صف ثنائية a binary block code) طولها n ولها معدل معلومات مقداره:

$$R(K) = \frac{k}{n} \qquad (5.16)$$

إذا كان لها 2^K كلمات شفرة (K=1 في المثال أعلاه). وهذا يعني أن لدينا رسالة أصلية متكونة من K بتات ونستخدم كلمات شفرة على n بتات.

5-6-3 شفرات التكرار Repetition Codes

يمكن أن تكون لدينا فرصة نجاح أكبر إذا استخدمنا شفرات التكرار وذلك بزيادة عـــدد بتات التشفير لبت معينة يراد إرسالها وأخذ معدل البتات الناتجة. أن شفرات التكرار لها معدل معلومات

$$R(K) = \frac{1}{n}.$$

5-10): قناة تشفير K_3 يمكن أن تكون

$$0 \rightarrow 000,$$

$$1 \rightarrow 111.$$

مع قناة إزالة التشفير

$$000 \rightarrow 0, 001 \rightarrow 0, 010 \rightarrow 0, 100 \rightarrow 0,$$

$$111 \rightarrow 1, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 011 \rightarrow 1.$$

وعليه فإن معدل المعلومات يكون:

$$R(K_3) = \frac{1}{3}$$

وعليه فإن انقلاب بت في واحدة من أصل 3 بتات في كلمة تشفير تكون ثابتة، لكن معدل المعلومات يهبط إلى الثلث.

5-6-4 الضجيج الكمي Quantum Noise

عمليا لا نستطيع أن نجري قياسات تامة، ومن الصعب أن نحضر ونطبق بوابات كمية على حالات كمية تامة لأن الأنظمة الكمية الحقيقية تكون ذات ضجيج عالي.

أولا: تصحيح الخطأ الكمي Quantum Error Correction

شفرات تصحيح الخطأ الكمي صممت بنجاح، لكن المجال لا يزال عنوانـــا ســـاخنا. لا يزال بعض العلماء يعتقدون أن الحوسبة الكمية يمكن أن تكون مستحيلة بسبب إزالة التـــشاكه الذي هو تأثيرات خارجية تدمر أو تتلف الحالات الكمية. نستخدم شفرات تـــصحيح الخطـــأ الكمي بدلا من الشفرات الكلاسيكية. حقيقة كونها كمية تنتج لنا مشاكل إضافية:

1- ليس هناك استنساخ cloning.

2- الأخطاء المستمرة، يمكن أن تحدث عدة أنواع من الأخطاء على كيوبت منفردة(ليس فقط نطة كما في الدارة الكلاسيكية) على سبيل المثال يمكن أن يكون لدينا تغير فى الطور

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle + e^{i\theta}\beta|1\rangle.$$

3- القياس يدمر المعلومات الكمية(وعليه فإذا استخدمنا شفرة تكرار، كيـف سـنطبق المنطق السائد لاسترداد الكيوبتات؟)

أدناه بعض الأمثلة البسيطة على الأخطاء الكمية:

مثال(5-11): الطور النسبي لكيوبت تنط

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle - b|1\rangle.$$

مثال(5-12): سعات كيوبت تنط

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle + a|1\rangle.$$

مثال(5-13): سعات كيوبت والطور النسبي ينطان

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle - a|1\rangle.$$

ثانيا: شفرة تكرار كمية Quantum Repetition Code

هذه الشفرة هي رديف لشفرة تكرار كلاسيكية، للمجالات الكلاسيكية(الحـالات التـي ليست في حالة تراكب) يكون هذا سهلا.

$$|0\rangle \rightarrow |000\rangle.$$

$$|1\rangle \rightarrow |111\rangle.$$

سوف لا تسمح لنا نظرية اللااستنساخ لعمل نسخ من الكيوبتات في حالة تراكب، أي أنها تمنعنا من أن يكون لدينا

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi\rangle|\Psi\rangle|\Psi\rangle$$

التي بفكها تصبح

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

لذلك فالذي نعمله هو تشفير حالتنا المركبة إلى الحالة المتشابكة التالية:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle|1\rangle = |\Psi'\rangle$$

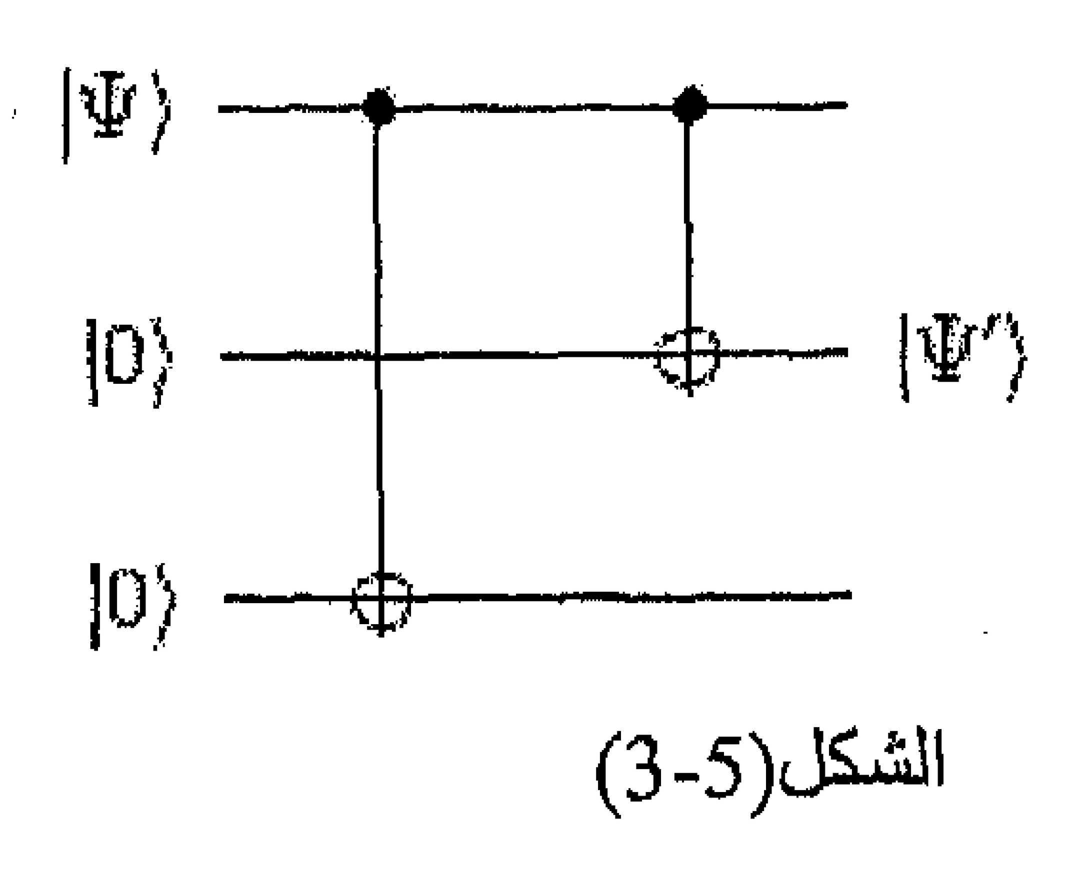
أو

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

التي تشفر كما يلي:

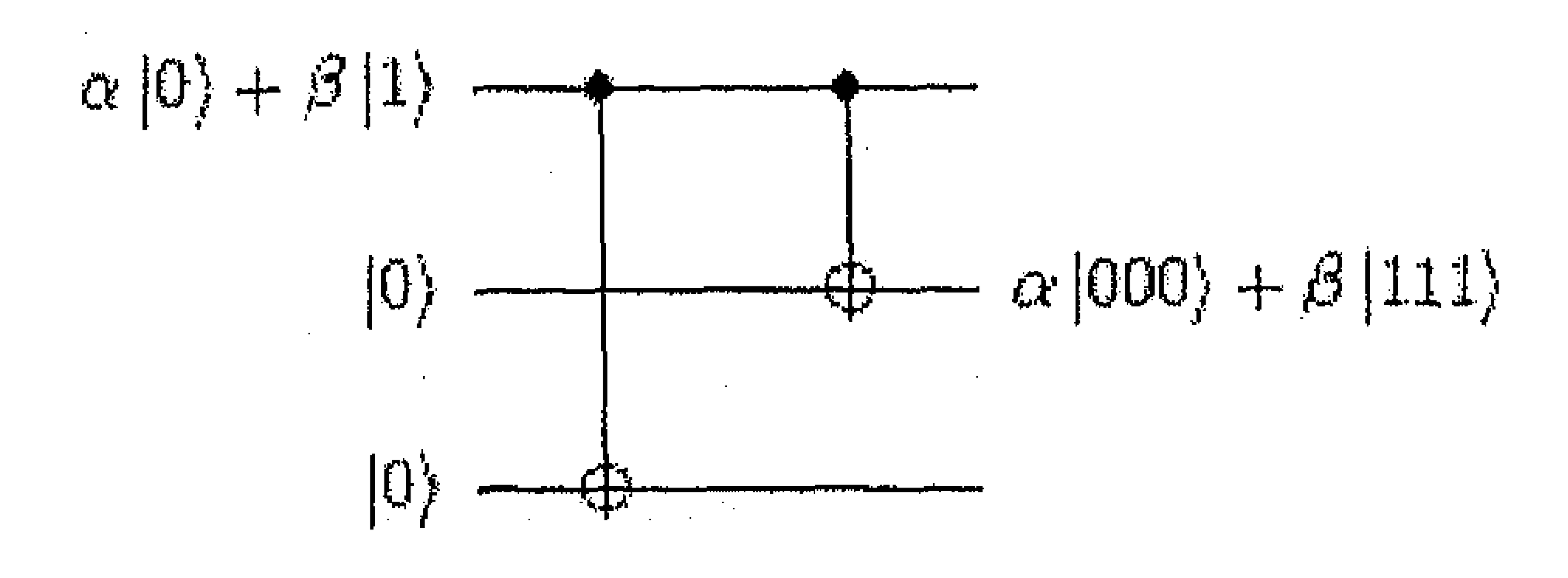
$$\alpha|000\rangle + 0|001\rangle + 0|010\rangle + 0|011\rangle + 0|100\rangle + 0|101\rangle + 0|110\rangle + \beta|111\rangle.$$

دارة بسيطة لنظام التشفير ها موضحة في الشكل(5-3).



الشكل(5-3)

وعليه فإذا جعلنا حالة الدخل $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ عندئذ سنحصل الشكل(5-4).



$\uparrow |\psi_1\rangle \quad \uparrow |\psi_2\rangle \quad \uparrow |\psi_3\rangle$

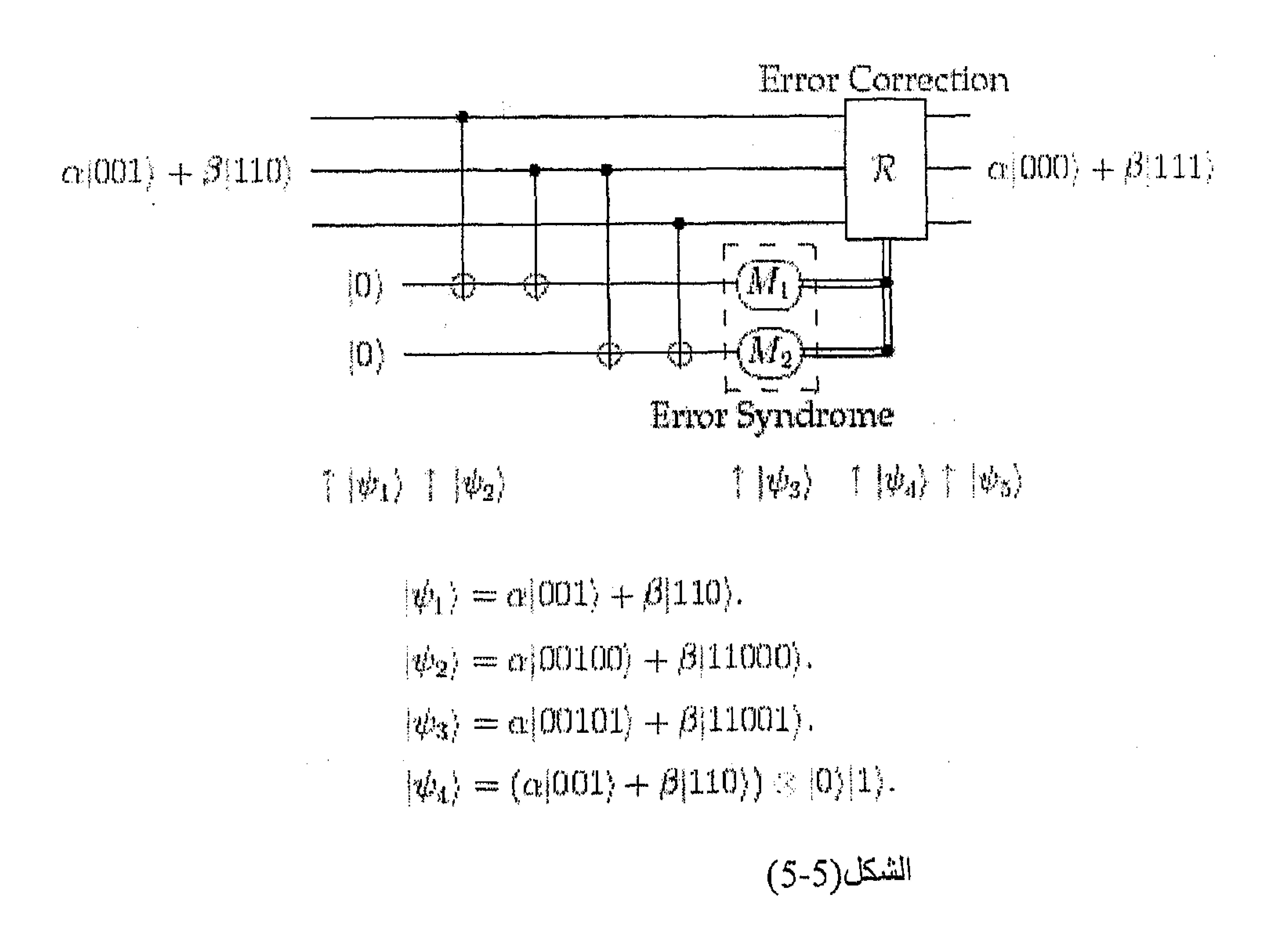
الشكل(5-4)

يرينا الشكل مراحل التطور الحالة $|\Psi\rangle$ الناتج عن تطبيق بوابات CNOT تكون الحالات $|\Psi_i\rangle$ كما يلي :

$$|\psi_1\rangle = \alpha|001\rangle + \beta|110\rangle.$$
$$|\psi_2\rangle = \alpha|00100\rangle + \beta|11000\rangle.$$
$$|\psi_3\rangle = \alpha|00101\rangle + \beta|11001\rangle.$$
$$|\psi_4\rangle = (\alpha|001\rangle + \beta|110\rangle) \otimes |0\rangle|1\rangle.$$

ثالثا: تثبيت الأخطاء Fixing Errors

نحن نقرر بأن هناك خطأ وذلك بتشبيك الحالة المشفرة مع كيوبتين مساعدين وتنجز قياسا على كيوبتات مساعدة. بعد ذلك نعدل حالتنا طبقا لنتائج القياسات كما هو موصوف في الجدول (5-1). لاحظ أننا نفرض أن خطأ قد حدث بعد التشفير وقبل أن ندخل الحالة إلى هذه الدارة المبينة في الشكل(5-5).



الشكل(5-5)

أن قياسات M_1 و M_2 تسبب قراءة 01 على الخطين 4 و 5. ولذلك فإننا الآن نغـذي 01(تسمى ميزة الخطأ) إلى تصحيح الخطأ الذي نقوم به (أو معالجة) الدارة R التي تنجز التالي للتراكب $\alpha|001\rangle + \beta|110\rangle$

الجدول(5-1)

M_1	M_2	Action
0	0	no action needed, e.g. $\|111\rangle \to \|111\rangle$
0	1	flip qubit 3, e.g. $\|110\rangle \to \|111\rangle$
1	0	flip qubit 2, e.g. $\|101\rangle \to \|111\rangle$
1	1	flip qubit 1, e.g. $\|011\rangle \to \|111\rangle$

وعليه فإننا نسلط نطة بتة مفردة على الخط 3 لإعطاء:

$$|\psi_5\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

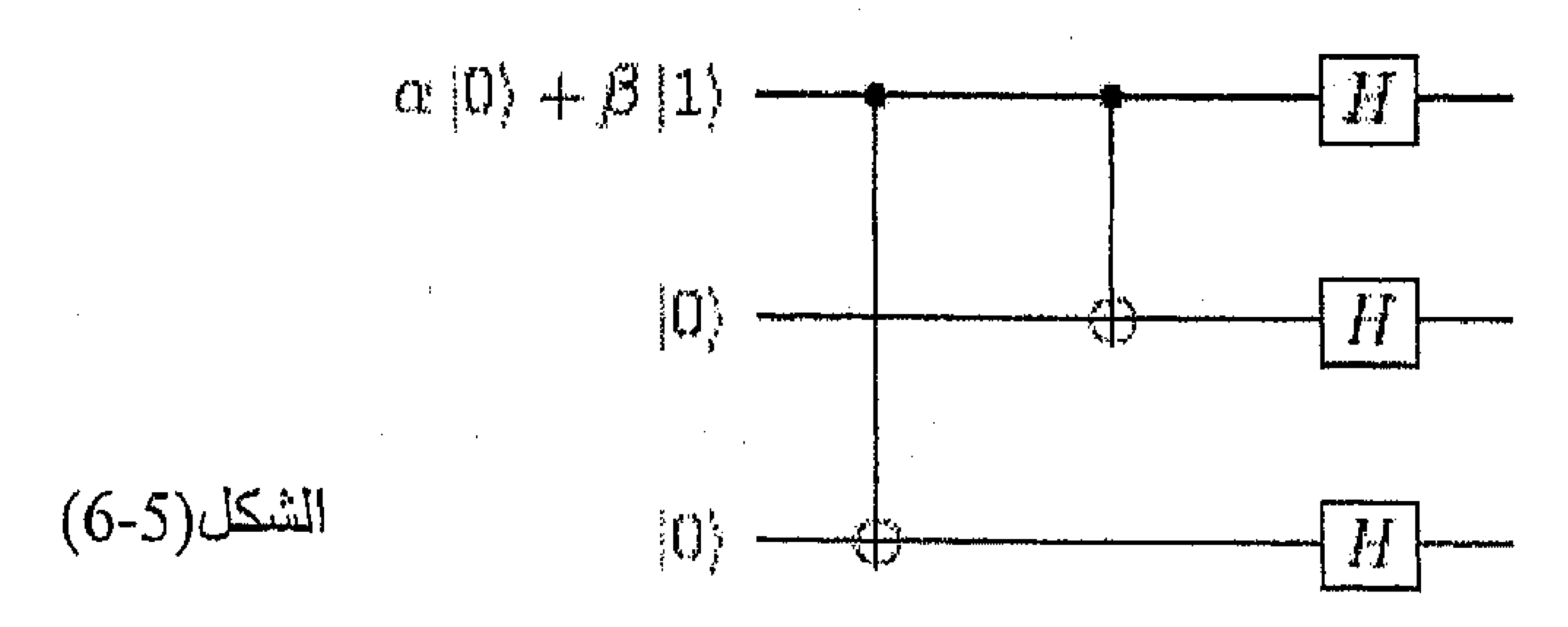
سوف تثبت هذه الدارة نطة بتة مفردة في شفرة التكرار لكيوبتاتنا الثلاث. كل الذي تبقـى هو تشفير $|\Psi\rangle$ للعودة إلى حالتنا الأصلية، أي أن

$$\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \to \alpha|000\rangle - \beta|111\rangle$$

والتي يزال تشفيرها

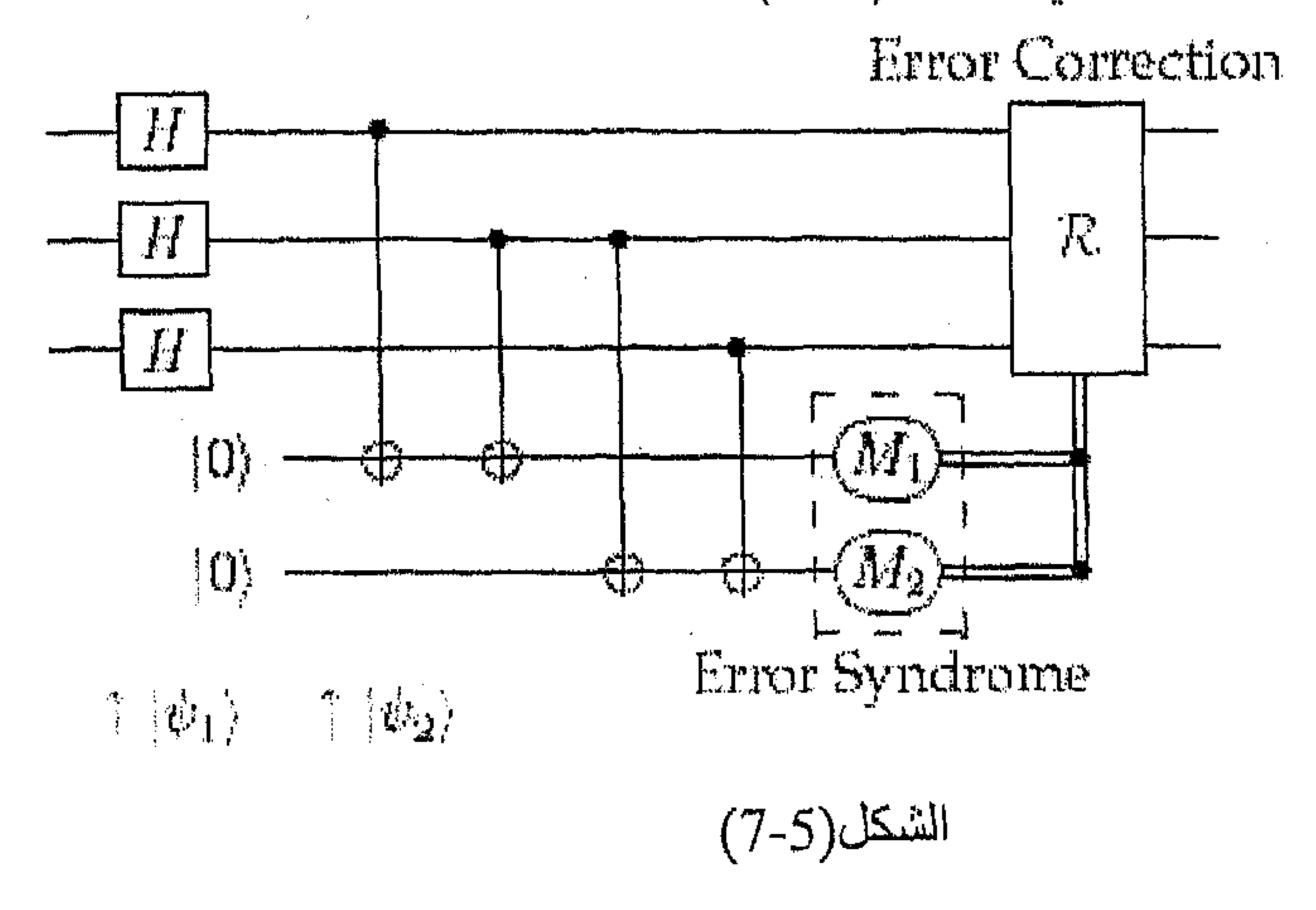
$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \to \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

ونستدل من ذلك أن علينا أن نغير طريقة التشفير للتعامل مع نطة طـور نـسبية التـي ننجزها باستخدام الدارة المبينة في الشكل(5−6).



الشكل(5-6)

إن دارة تصحيح الخطأ لنطة طور نسبية هي تقريبا نفس دارة تصحيح الخطأ لنطة السعة تماما، نحن فقط نضيف بعض بوابات هادامارد عند البدء لتناول التراكيبات التي ولدناها مع التشفير الابتدائي المبين أعلاه. تذكر مرة أخرى بأن أي خطأ يحدث، فإنه يحدث بين التشفير والدارة التي نريد تعريفها في الشكل(5-7).



الشكل(5-7)

لنفرض أن لدينا نطة طور على الخط 2. إذا كانت حالة الدخل:

$$|\psi_1\rangle = \alpha\,|++-\rangle + \beta\,|--+\rangle$$

فإن:

$$|\psi_2\rangle = (\alpha\,|001\rangle + \beta\,|110\rangle)\,|00\rangle$$

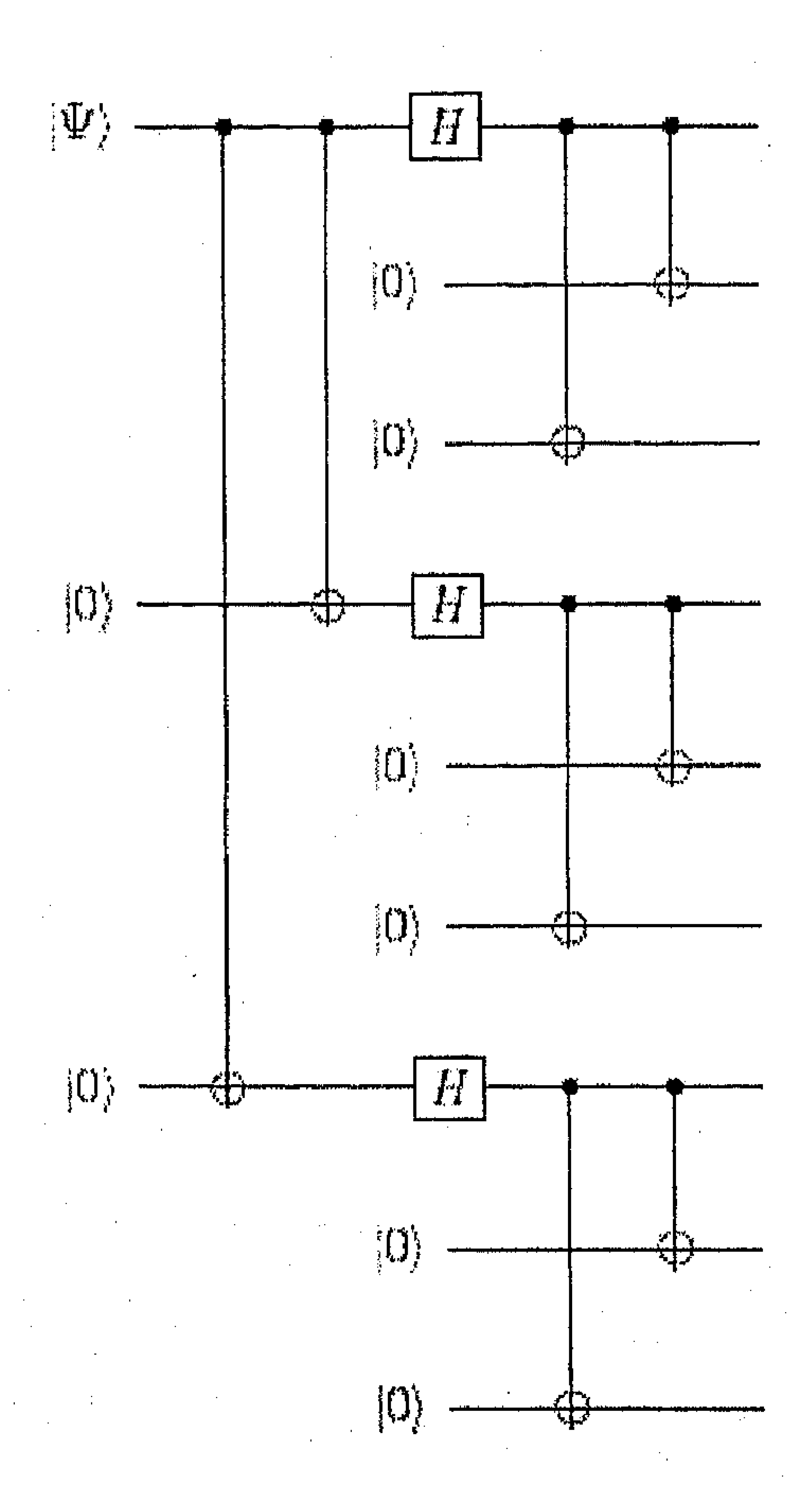
وهذا هو نفسه للحالة $|\psi_2\rangle$ في حالة نطة ثنائي. طالما أن بقية الدارة هي نفسها فإننا نحصل على خرج R كما يلي:

$$\alpha\,|000\rangle + \beta\,|111\rangle$$

كما سبق.

من الجدير بالملاحظة أن هذه الأخطاء تعرف بدلالة الأساس $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. إذا استخدمنا الأساس $\{|-\rangle, |+\rangle\}$ فإن دارة نطة الطور أعلاه تثبت نطة ثنائي والعكس صحيح.

بدلالة الكيوبتات المفردة، يمكن لنطة طور نسبية أن تثبت مع HZH ونطة سعة مع X. لكن لا تزال لدينا مشكلة لأن الدارة أعلاه لا تكشف نطة سعة. دارة تشفير ثالثة تنتج شـفرة شور Shor code التي هي تسعة شفرات كيوبت التي فيها معلومات كافية لنا لكـي نكـون قادري على تطبيق كلا النوعين من دارات تـصحيح الخطـأ، ويكـون هـو أول QECC (Quantum Error Correction Code). الدارة مبينة في الشكل(5-8).



الشكل(5-8)

إن شفرة شور هي واحدة من عدة QECC ، مثال آخر هو شفرة ستين Steane code . وهذان كلاهما شفرات CSS (Calderbank, Shor, Steane). شفرات CSS هي جزء من زمرة أكثر عمومية QECC تسمى شفرات المثبت Stabiliser codes.

5-7 حالات بيل Bell States

كما ذكرنا في الفصل 2 فإن تجربة EPR بينت أن الجسيمات المتشابكة تبدو أنها تتواصل معلومات كمية معينة لحظيا عبر مسافة اعتباطية عند القياس. لقد استخدم اينشتاين هذا كجدل ضد فكرة أن الجسيمات ليس لها حالة معرفة حتى تقاس(أي أنه جادل بأنها تمتلك "متغيرات مخفية"). لقد برهن جون بيل 1928-1990 في سنة 1964 بأنه يمكن أن لا يكون هناك متغيرات مخفية محلية. في الوصف التالي لبرهانه أخذ بنظر الاعتبار حقيقة أن بامكاننا قياس برم جسيم في عدة اتجاهات مختلفة. خلال هذا البند سنشير إلى وضع اينشتاين EPR ووضع الميكانيك الكمي ك QM.

لقد أخذ بيل نظام جسيمين ببرم متشابك يجري قياسهما من قبل مراقبين عن بعد(المراقبين 1 و 2). لقد بين أنه إذا قاس المراقبان البرم في نفس الاتجاه (أي Z) فليس هناك فرق تجريبي بين النتائج المتنبأ بها من قبل الموضعين(QM or EPR). ولهدف مثالنا سنبدأ بتعريف الحالة المتشابكة التالية:

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0_1 1_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1_1 0_2\rangle.$$

لقد أدخلنا الفكرة $|0_1 1_2\rangle$ للتفريق بين الكيوبتان 1 و 2 ، اللذان سيصبحان مهمان لاحقا.

Alice	*Bob*	**Frequency**
z	z	
1	0	50%
0	1	50%

إذا سمحنا للاتجاهات أن تكون مختلفة فمن الممكن أن نحصل تجريبيا على فرق جدول الاختبار. الحدس لهذا هو أنه إذا ، كما يقول QM، كان ما يحدث عند المراقب 2 معتمد على ما يحدث عند المراقب 1، والأخير معتمد على الاتجاه عند 1، فإن ما يحدث عند 2 سيشمل كلا الاتجاهين (نحن نتصور أن قياس 1، في اتجاه ما، يسبب تحطم الحالة بحيث أن جسيم 2 "يشير" في اتجاه مضاد للجسيم 1 وعندئذ يقاس في اتجاه

المراقب 2، احتمالية الخرج، برم للأعلى أو للأسفل يكون معتمدا على الزاوية بين الاتجاهين أنظر تحت). بينما من وجهة نظر EPR ، فإن ما يحدث عن المراقب 2 لا يمكن بأي حـال من الأحوال أن يشمل اتجاه الملاحظ 1. إن ما يحدث عند المراقب 2 سوف، في الغالـب، يعين بواسطة المقدار الذي يحمله الجسيم 2 عند الانبعاث والاتجاه عند المراقب 2.

5-7-1 اتجاه القياس نفسه Same Measurement Direction

لكي نرى أن قياسات نفس الاتجاه لا يمكن أن تقود إلـى فـرق تخيـل أولا أن هنـاك مراقبين منفصلين، Alice وBob اللذان ينفذان عدة محـاولات لتجربـة EPR مـع بـرم جسيمات. لنفرض أن كل منهما يقيس برم الإلكترون الذي يطير باتجاههما. إذا قاس كلاهمـا في نفس الاتجاه، لنقل Z، فإن النتائج يمكن أن تمثل كما يلي:

وسندرك في الحال أننا لا نستطيع التمييز بين موضعين.

موضع QM: هذا يوضح النتيجة بالقول، بقياس Alice 1، فإن تراكب متجـه الحـال $|\Psi_A\rangle$ ينهار إلى أحد الحدين التاليين:

$$\text{either } |0_1 1_2\rangle \text{ or } |1_1 0_2\rangle$$

باحتمالية 50% لقياس Alice 0 أو 1. ولكن بعد ذلك لا يكون تراكـب (قيـاس Alice أنتج 0 على جسيم 1 و 1 على جسيم 2 أو العكس) وناتج قياس بوب على 2 مقـرر بـشكل كامل (بالمقارنة مع الناتج على 2) وسيكون عكس ناتج Alice.

موضع EPR : يقول هذا أن الجسيمات بالحقيقة تمتلك قيما معرفة عند اللحظـة التـي تنبعث بها، وهذه تكون ضديدة الارتباط anti-correlated وموزعة بعشوائية بين 01 و 10 على محاولات مكررة. عندما تقيس Alice 0 يقيس Bob 1 ليس لأن قياس Alice أنتج أي شيء ولكن ببساطة لأن 1 هو المقدار الذي يمتلكه الجسيم دائمـا (الـذي يظهـر القيـاس). العشوائية هنا هي بسبب الحالات الابتدائية (الانبعاث)، وليس كي ينهار. في كلا الاتجـاهين فلدينا نفس التنبؤ

5-7-2 القياس المختلف الاتجاهات Different measurement Directions

إن اختراع بيل كان لإدراك أن فرقا سيحدث إذا جلبنا قياس مختلف الاتجاهات. حدس مثل هذا يمكن أن يحدث كما يلي:

لنفرض أن هناك اتجاهين a(=z) و b . لنبدأ مع $|\Psi_A\rangle$ ونسمح ل Alice أن تقيس الجسيم 1 في اتجاه a. وهذا سيسبب انهيار، كما سبق، ولدينا $\text{either } |0_1 1_2\rangle \text{ or } |1_1 0_2\rangle$.

لقد أنتج قياس Alice 1 (برم للأسفل) باتجاه على جسيم 2 (لأخذ الحالة الأولى). يقيس Bob الآن في اتجاه b . لنرى مالذي يحدث طبقا ل QM علينا أن نصف $|1_2\rangle$ بدلالة أساس b. عند الزاوية θ مع a فإن ذلك يؤدي إلى:

$$|1_2\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+_2\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-_2\rangle \qquad (5.36)$$

حيث $|+_2\rangle$ يعني برم للأعلى على طول محور b. إن هذا يبدو صحيحا. إذا كانت $\theta = 90$ (الحالة التي عندها b=x) نحصل $\frac{1}{\sqrt{2}}$، كما سبق، عندما $\theta = 0$ (الحالة b=z) نحصل $|-_2\rangle$ ($=|1\rangle$ في تلك الحالة). وبالمثل للحالة $|0_2\rangle$

$$|0_2\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+_2\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-_2\rangle. \qquad (5.37)$$

النقطة المهمة في النقاش أعلاه هي، طالما أن θ هي الزاوية بين a و b، فإن تجاه قياس Alice يدخل في (يؤثر) على ما يحدث ل Bob. لكن هذا لا يمكن أن يحدث في وجهة النظر المحلية الواقعية، لأن:

1- قيم برم الجسيمات يعين بلحظة الانبعاث ولا ينتج عند لحظة معينة لاحقا كنتيجة لتأثير القياس (واقعية).

2- بالإنشاء ، الأحداث عند نهايةBob بعيدة عن وصول أحداث عند نهاية Alice (المحلية) لقد حصرت الفأرة: بجلب اتجاهات مختلفة من القياس إليها، يجب أن نحصل فرق قابل للكشف. هكذا علل بيل.

3-7-5 لامساواة بيل Bell Enquality

بدى لنا أننا بحاجة إلى ثلاثة اتجاهات، وعليه فيسمح لكل من Alice و Bob أن يقيسا في ثلاث اتجاهات ممكنة تسمى a و b و c، بالحقيقة نحن سنأخذ الحالة عندما تكون هذه الاتجاهات الثلاث في مستوى واحد، عمودي على اتجاه الطيران وتصنع زاوية 120° بالنسبة لبعضها البعض. عندما يقيس Alice و Bob بنفس الاتجاه مثلا a و a فسيجدان ترابطا: 1 مع 0، أو 0 مع 1 كما في أعلاه. لكن عندما يقيسان باتجاهات مختلفة، مثلا a و b فالارتباط ليس مطلوبا، ويمكن لكلاهما أن يلاحظا 1. على سبيل المثال (كما في الصف 3 أدناه) وجهة نظر QM

Alice	*Bob*	**Probability**
a	*b*	
0	0	$\frac{3}{4}$
0	1	$\frac{1}{4}$

إذا وضعنا $\theta = 120°$ في (6.38) نحصل على:

$$|1_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+_2\rangle + 1/2|-_2\rangle$$

وهذا يقول لنا بأن Alice قاست 0 باتجاه a (كما في (6.37)). سيقيس Bob الآن + في اتجاه b (أي برم للأعلى أو 0) باحتمالية $\frac{3}{4}$ و – في اتجاه b (أي برم للأسفل أو 1) باحتمالية $\frac{1}{4}$. الحاصل الصافي هو أننا لدينا:

	aa	*ab*	*ac*	*ba*	*bb*	*bc*	*ca*	*cb*	*cc*
Outcome S	0	75	75	75	0	75	75	75	0
Outcome D	100	25	25	25	100	25	25	25	100

سنحصل على نتائج مكافئة في الازدواج الثاني للاتجاهات المختلفة(على سبيل المثال Alice تختار b و Bob يختار c) طالما أن الزوايا بين مثل هذه الاتجاهات هي نفسها دائما. بشكل عام لدينا مايلي:

"إذا كانت الاتجاهات مختلفة فإن الاحتمالية للناتج أن يكون نفسه S (أي 00) يكون $\frac{3}{4}$، لأن يكون مختلفا (Dأي 01)يكون $\frac{1}{4}$. من جهة أخرى، إذا كانت الاتجاهات هي نفسها فإن الاحتمالية للنتائج مختلفة (D) تكون 1."

لنفرض بأننا ننفذ 900 محاولة. ونغير اتجاهات القياس عشوائيا بحيث أن كـل ارتبـاط يحدث 100مرة. فإن النتائج يجب أن تصبح كما يلي:

صافي الناتج هو أن S يحدث 450 مرة و D يحدث 450 مـرة. نـستنتج أن **احتماليـة النتائج المختلفة هي** $\frac{1}{2}$.

5-7-4 وجهة نظر EPR

سنفرض بأن كل جسيم يحمل "قيمة برم" نسبة لكل اتجاه ممكن(كما هو الحال في الفيزياء الكلاسيكية)، باستثناء أن القيمة المقاسة ستكون دائما "برم للأعلى" (0) أو "برم للأسـفل" (1) وليس قيمة معينة وسطا بين تلكما القيمتين (بحيث لا يمكن اعتبار أن القيم المقاسة كمـساقط لمتجه البرم في فضاء 3D على اتجاه المجال المغناطيسي كما هـو الحـال فـي الفيزيـاء الكلاسيكية). ولكي نحسب حساب هذه نقول، عند لحظة الانبعاث، يترك كل جسيم بتركيـب (صفة الجسيم، أو متغير مخفي ، أو مفتاح، أو مركبة) واحدة لكل حالة اتجاه ممكنة (a,b,c) والتي فيها يمكن أن تقاس والتي تعين الناتج المقاس في ذلك الاتجاه(مـن المـألوف، قبـل الميكانيك الكمي، أن القياس يكتشف أو يظهر ما هو موجود مسبقا). طالما أن القياس في اتجاه معين يمكن أن يكشف قيمتين ممكنتين، 0 أو 1،الصفة المطابقة، التي نسميها مركبة A ، يجب أن يكون لها مقدارين: إما A=0 أو A=1، التي تعين ناتج القياس(كما تـم ملاحظته أعلاه، لا نستطيع السماح عشوائية في عمل القياس لأن ذلك سيحطم ارتباط aa الخ، إن العشوائية الوحيدة التي يمكن أن تحدث هـي تعيـين المقـادير الابتدائية للمركبة عند لحظة الانبعاث، انظر أدنـاه).

	Alice			Bob		
Row	a	b	c	a	b	c
1.	1	1	1	0	0	0
2.	0	1	1	1	0	0
3.	1	0	1	0	1	0
4.	0	0	1	1	1	0
5.	1	1	0	0	0	1
6.	0	1	0	1	0	1
7.	1	0	0	0	1	1
8.	0	0	0	1	1	1

بالمثل لدينا B=0 أو B=1 و C=0 أو C=1. (لربما يبدو أننا بحاجة إلى مالا نهاية من هذه الصفات لتجهيز مالا نهاية من اتجاهات القياس الممكنة. إن هذا لا يشكل مشكلة في الفيزيـاء الكلاسيكية حيث يتصرف البرم كإبرة مغناطيسية: إن مالا نهائية المركبات المراقبـة للعـزم

المغناطيسي، معتمدة على اتجاه القياس، ليست أكثر غموضا من مالا نهائية أطوال الظل المسقطة من قبل عصا بالاعتماد على اتجاه الشمس. لكن لاحظ أنه يبدو غريبا الأخذ بالحسبان لمالا نهائية أطوال الظل بالقول أن للعصا مالا نهاية من المركبات أو"التراكيب" معينين كيف يجب أن يظهر الظل، بالاعتماد على زاوية الشمس!).

إن مقادير (A,B,C) هي مجموعة لكل جسيم عند زمن الانبعاث وتحمل من قبلها. يمكن تعيينها عشوائيا باستثناء، وذلك للخضوع لقانون الحفظ، لأنه إذا كان A=0 للجسيم 1 عندئذ A=1 للجسيم 2...الخ. لكن يمكن أن تكون A=0 لجسيم 1 و B=0 لجسيم 2 طالما، تجريبيا، لايرتبط البرم إذا قسنا في اتجاهات مختلفة(في هذه الحالة إذا قمنا بالقياس باتجاهات مختلفة(في هذه الحالة إذا كانت القياسات في اتجاهات a و b فإن النتيجة ستكون 00).

لنفرض أن الجسيم 1 له التعيين A=0,B=1,C=1 أي 011. يمكننا حالا معرفة أي مركبات للجسيم 2 يجب أن تكون: A=1,B=0,C=0 أي 100. وهذا ضروري إذا كان الجسيمين سيعطيان ضديد الترابط للحالة التي نعمل فيها نفس قياسات الاتجاه في كل اتجاه .(a,b,c)

نستطيع عندئذ أن نضع التعيينات الممكنة لمقادير المركبة كما يلي:

Alice's particle	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
111	D	D	D	D	D	D	D	D	D
011	D	S	S	S	D	D	S	D	D
101	D	S	D	S	D	S	D	S	D
001	D	D	S	D	D	S	S	S	D
110	D	D	S	D	D	S	S	S	D
010	D	S	D	S	D	S	D	S	D
100	D	S	S	S	D	D	S	D	D
000	D	D	D	D	D	D	D	D	D

يمتثل الجدول للقاعدة التي تنص على أن القياسات في نفس الاتجاه يجب أن تكون مرتبطة(بهذه الكيفية تتولد المداخل بالسماح لمقادير abc لـ Alice أن تنفذ ثمانية إمكانيات ثنائية، لكل حالة تعين قاعدة الترابط حالا مداخل Bob المطابقة أي أن ليس لدينا خيار).

لكنها تسمح لكل الاحتمالات في مختلف الاتجاهات. على سبيل المثال يمكن أن تكـون لـدينا حالة يستطيع فيها Alice أن يجد 1 و Bob أن يجد 1 أيضا في اتجاه a (صفي 3 و 7) أو 0 (صفي 1 و5).

نحن الآن نقترب من. لنفرض أننا تأملنا المحاولات التسعمائة من وجهة النظر الواقعية. هناك فقط ثمانية تعينات من الصفات (اختيار الطبيعة). وهنـاك تـسعة ارتباطـات ممكنـة لاتجاهات القياس (اختيار القائم بالتجربة). نحن نفرض بـأن الجـسيمات تطيـر بتعينـات والقياسات تظهر تلك بسهولة (ليس هناك إزعاج يستوجب القلق، كما هو متفق). وعليه ففـي كل حالة نستطيع أن نقول الناتج. على سبيل المثال، إذا اختارت الطبيعة صف 7 (أعلاه)، أي 100 واختار القائم بالتجربة ab فإن الناتج يعين تماما كأنه S، كما يلي. تحصل Alice جسيم 100، تقيسه في اتجاه a، وتحصل 1، أما Bob فيحصل جسيم 011، ويقيسه فـي اتجـاه b ويحصل 1. وبالتالي فإن الناتج الإجمالي يكون 11، أي S.

ما هي احتمالية النواتج المختلفة D؟ إذا استلمت Alice جسيم بمركبات متـساوية(مثـل 111) فهذه الاحتمالية دائما 1. إذا استلمت Alice جسيم بمركبات غير متساوية (مثل 011) فإن الاحتمالية دائما $\frac{5}{9}$ (أنظر على طول الصف ل 011: إن D تحث 5 مرات من 9). نحن لا نعرف إحصائية المصدر: كم في الغالب تبعث الجسيمات بأنواعها ألثمان. لكننا نـستطيع استنتاج بأن الاحتمالية الكلية ل D تكون:

$$p_{equal} + \frac{5}{9} p_{unequal}$$

طالما أن كلا p's يجب أن يكون موجبا نستنتج أن: احتمالية النواتج المختلفة تكون أكبـر من $\frac{5}{9}$. هناك تناقض الآن حيث أن QM يقول أن الاحتمالية يجب أن تكون نصف بينمـا الواقعية تقول أنها يجب أن تكون أكبر من $\frac{5}{9}$ وعليه فإن QM فاز!

الفصل السادس
الخوارزميات الكمية Quantum Algorithms

6-1 مقدمـــــة

الخوارزميات الكمية هي طرق ربط العمليات الوحدويـــة unitary operations فـــي نظام كمي لتحقيق بعض الأهداف الحاسوبية. لقد تم تطوير عدد من الخوارزميات على مدى العشرين عام الماضية لتسخر العرض فريد الخصائص المقدم من قبل الحواسب الكمية. هذه الخوارزميات صممت لتعطي حسنات خاصة تفوق نظيراتها الكلاسيكية.

تعطي خوارزمية شور Shor(1995) التحليل إلى العوامل factorization لأعــداد اختيارية كبيرة الصف التعقيدي الزمني $O\left((\log N)^3\right)$، حيث يكون مكافئها الكلاسيكي أســياً تقريباً. إن هذا غاية في الأهمية للكتابة السرية cryptography، فمثلاً؛ RSA تعول علــى كون التحليل إلى العوامل عسيراً intractable و الذي يعني: أنه لا يوجد حل متعدد الحدود يغطي جميع مراحل المسألة. مثال آخر هو خوارزمية قاعدة بيانات غروفر Grover البحثية التي تزود بحث القائمة ذات N من المواد بسرعة تربيعية. هذا يأخذ القيمة الكلاسيكية للبحث الخطي من $O(N)$ مرة إلى $O\left(N^{\frac{1}{2}}\right)$ مرة. الخوارزميات الكمية المعروفة تشبه_ أو تقتــبس جزئياً_ هاتين الخوارزميتين. من أهم خصائص هاتين الخوارزميتين ما يلي:

- خوارزميات نوع شــور Shor تــستخدم تحويــل فــوريير الكمـــي Fourier transform quantum وهذه تشمل: تحليل إلى العوامل factoring, مــسألة المجموعــة الثانية المخفية The hidden subgroup problem , اللوغاريتمات المنفصلة discrete logarithms , إيجاد الرتبة order findin (جميع التغيرات على الموضوع).

• خوارزميات البحث نوع غروفر (Grover type search algorithms) تستخدم في التطبيقات مثل بحث قاعدة البيانات السريع والتحليل الإحصائي .

هناك أيضا خوارزميات هجينة hybrid algorithms مثل العد الكمي quantum counting الذي يقوم بعمل اتحاد عناصر من الجهتين، وخوارزميات أكثر سرية مثل المحاكيات الكمية quantum simulation في هذا الفصل سننظر إلى خوارزمية ديوتش Deutsch's algorithm , خوارزمية ديوتش جوزا Deutsch-Josza، خوارزمية شور Shor's algorithm وخوارزمية غروفر Grover's algorithm.

2-6 خوارزمية ديوتش Deutsch's algorithm

خوارزمية ديوتش هي مثال بسيط على الموازاة الكمية quantum parallelism والمشكلة التي تحلها هذه الخوارزمية ليست الأهم، ولكن طبيعتها السهلة جيدة لتوضيح التراكب الكمي quantum superposition.

1-2-6 تعريف المشكلة The problem Definition

لدينا اقتران $f(x)$ حيث $f(x):\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$ له مدى البت الواحد one bit domain هذا يعني أن $f(x)$ تأخذ بتاً واحداً (إما 0 أو 1) كعامل وتعيد بتا (مرة أخرى إما 0 أو 1). لهذا فان الدخل والخرج كلاهما لهذا الاقتران يمكن أن يمثلا ببت أو كيوبت.

نريد أن نختبر ما إذا كان هذا الاقتران هو واحد لواحد one to one (متوازن) حيث واحد لواحد يعني:

$$f(1)=0 \quad \text{و} \quad f(0)=1 \quad \text{أو} \quad f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(1)=1$$

الخيار الآخر هو أن $f(x)$ ليس واحداً لواحد (أي أنه ثابت) الحالة التي نحصل فيها على :

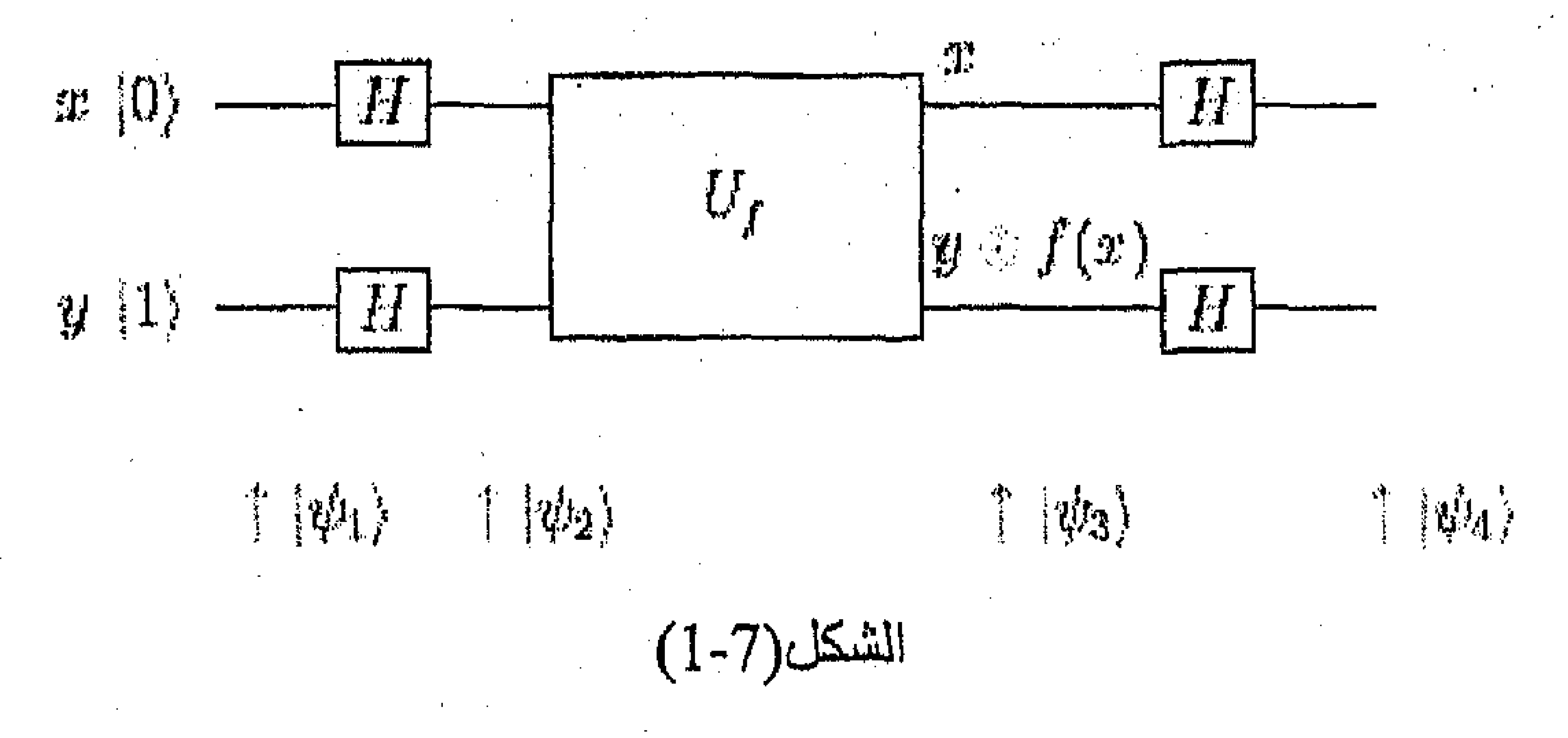
$$f(1)=1 \quad \text{و} \quad f(0)=1 \quad \text{أو} \quad f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(1)=0$$

الدارة التي تحدد بعض خصائص الاقتران تسمى أوراكيل oracle. إنها مهمة لملاحظة أن الشيء الذي تقوم بعمله الحواسيب الكمية بشكل جيد هو اختبار الخصائص الشاملة للاقتران, وليس نتائج تلك الاقترانات التي تعطي مدخلات معينة. لعمل هذا بكفاءة نحتاج للنظر إلى قيم عديدة في آن معاً.

6-2-2 الحل الكلاسيكي The Classical Solution

الحل كالتالي:

إذا و فقط إذا كان: $f(0)\oplus f(1)=1$ يكون الاقتران واحداً لواحد (حيث: $\oplus$ مكافئة



الشكل(7-1)

لبوابة استثناء/أو EXOR).

و قد تم عملها من ثلاث عمليات متضمنةً تقييم اقترانين:

1. $x=f(0)$
2. $y=f(1)$
3. $z=x\oplus y$

هل يمكننا عمل هذا بشكل أفضل باستخدام الحاسوب الكمي؟

6-2-3 الحل الكمي The Quantum Solution

الدارة الكمية (الشكل(7-1) تؤدي الخطوتين الأوليتين في الحل الكلاسيكي في عملية واحدة بواسطة التراكب.

فيما يلي الخطوات من $|\psi_1\rangle$ إلى $|\psi_4\rangle$ التي نحتاجها لحل المسألة بطريقة ميكانيكية كمية.

$|\psi_1\rangle$: أعطيت كل من الكيوبتين x و y التالي (نسمي x : مسجل السؤال the query register و نسمي y : مسجل الجواب the answer register):

$$x = |0\rangle$$
$$y = |1\rangle$$

$|\psi_2\rangle$: تقوم بتطبيق بوابات H على مسجلات المدخلات لذا فإن متجه حالتنا الآن:

$$|\Psi\rangle = \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$|\psi_3\rangle$: تـؤثر U_f علـى الكيـوبتين x و y ، تحديـداً نـستخدم: $|\Psi\rangle \to U_f \to |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$.

بعد بعض المعالجات الجبرية تنتهي النتيجة في x، و تبدو y غير متغيرة (انظر المثـال أدناه)، ل$(f(0 \neq f(1))$ (متوازن)، نحصل على:

$$|\Psi\rangle = \pm\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

و ل$(f(0) = f(1))$ (ثابت):

$$|\Psi\rangle = \pm\left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

ملاحظة: $\pm$ التي في بداية الحالة هي مجرد نتيجة للحسابات الداخلية؛ فكون النتيجة لهذه الدارة موجبة أو سالبة ليس بالأمر المعضل (معاملات الطور الشامل ليست لها دلالة).

$|\psi_4\rangle$: يتم إرسال x عبر بوابة H مجدداً. خال تحول 1 أو 0 إلى تراكب، تعيد بوابة H التراكب إلى 1 أو 0 (هذا يعتمد على الإشارة):

$$\left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \to H \to |0\rangle$$

$$\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] \to H \to |1\rangle$$

لذا؛ في الخطوة الرابعة، ل $f(0)\neq f(1)$ نحصل على:

$$|\Psi\rangle=\pm|1\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

و ل $f(0)=f(1)$:

$$|\Psi\rangle=\pm|0\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

في هذه النقطة حالتنا تكون اتحاداً من كلا الحالتين:

$$|\Psi\rangle=\pm|f(0)\oplus f(1)\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

حتى الآن لم تظهر فائدة y لنا. ولن نهتم بها الآن طالما تحمل x النتيجة. نستطيع فقط القيام بقياس جزئي على x و إلقاء y كنفاية. إذا كانت x=0 عندها يكون الاقتران ثابتاً، و إذا كانت x=1 يكون الاقتران متوازناً.

مثال(7-1): هناك أربعة ارتباطات للاقتران $f(x)$، سنلقي نظرة على اثنين فقط. حالتنا المعطاة في $|\psi_2\rangle$ هي: $\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle+|1\rangle]\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle-|1\rangle]$. حالتنا في $|\psi_3\rangle$ تكون كالتالي:

$$|\Psi\rangle=\left[\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\oplus f(x)\rangle-|1\oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(|0\rangle|0\oplus f(0)\rangle-|0\rangle|1\oplus f(0)\rangle+|1\rangle|0\oplus f(1)\rangle-|1\rangle|1\oplus f(1)\rangle\right)$$

جاعلين في الأذهان أن: $0\oplus 0=0$ ، $1\oplus 0=1$ ، $1\oplus 1=0$ ، $0\oplus 1=1$.

سنبدأ بالاقتران الثابت $f(0)=0$ و $f(1)=0$:

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{2}\left(|0\rangle|0\oplus 0\rangle-|0\rangle|1\oplus 0\rangle+|1\rangle|0\oplus 0\rangle-|1\rangle|1\oplus 0\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle\right)$$

$$=\left[\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

الآن، للاقتران المتوازن $f(0)=1$ و $f(1)=0$:

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle|0\oplus 1\rangle - |0\rangle|1\oplus 1\rangle + |1\rangle|0\oplus 0\rangle - |1\rangle|1\oplus 0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|01\rangle - |00\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right) \\
&= (-1)\frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\right) \\
&= (-1)\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]
\end{aligned}
$$

لاحظ أن (-1) تحركت خارج الحالة المتحدة؛ إنه معامل الطور الشامل و نستطيع تجاهله.

في $|\psi_4\rangle$ نضع حالتنا بأكملها عبر $H\otimes H$ و نأخذ $|01\rangle$ للاقتران الثابت و $|11\rangle$ للاقتران المتوازن.

6-2-4 الأدوات الفيزيائية Physical Implementation

نظرياً؛ يمكن أن يصنع حاسوب كمي يوظف خوارزمية ديوتش من صندوق كرتوني و ثلاث مرايا و زوجين من النظارات الشمسية. تستقطب النظارات الشمسية الضوء (بصورة معينة) ابتداءً إلى حالة غير عمودية (متراكبة) و بعدها تعود مجدداً. تعكس المرايا الموجودة داخل الصندوق الضوء بطريقة معينة تعتمد على هيئتها (بزوايا مختلفة تعتمد على نوع الاقتران المراد محاكاته). بعدها يظهر نور في الصندوق، إذا ظهر الضوء، يكون الاقتران متوازناً، و إذا لم يظهر يكون عندها الاقتران ثابتاً. الآن؛ إذا استخدمنا جهازاً بصرياً خاصاً لإرسال فوتون واحد فقط إلى الصندوق و كان لدينا كاشف ضوئي phtodetectorحساس على الطرف الآخر، عندئذٍ يصبح لدينا بناءً نظرياً أكثر كفاءة من ناحية أوراكيل oracle من أي حاسوب كلاسيكي.

يمكن لخوارزمية ديوتش أن تنفذ على أي معمارية حاسوب كمي و قد وظفت بنجاح، فعلى سبيل المثال؛ في عام 2001 تم تشغيل الخوارزمية على NMR (انظر فصل 8).

بسبب العدد الصغير نسبياً للكيوبتات التي يمكن صناعتها حالياً لتعمل معاً، فـإن عـدة مـن الخوارزميات الكمية الأخرى لم تختبر على نحوٍ مرضٍ.

6-3 خوارزمية ديوتش-جوزا The Deutsch-Josza Algorithm

إن خوارزمية ديوتش-جوزا هي امتداد لخوارزمية ديوتش التي تستطيع تقييم أكثـر مـن كيوبت واحد في عملية واحدة. نستطيع مدها لتقييم أي عدد من الكيوبتات بشكل آني باستخدام مسجل سؤال ذي n -كيوبت لـx بدلاً من مسجل الكيوبت المنفرد.

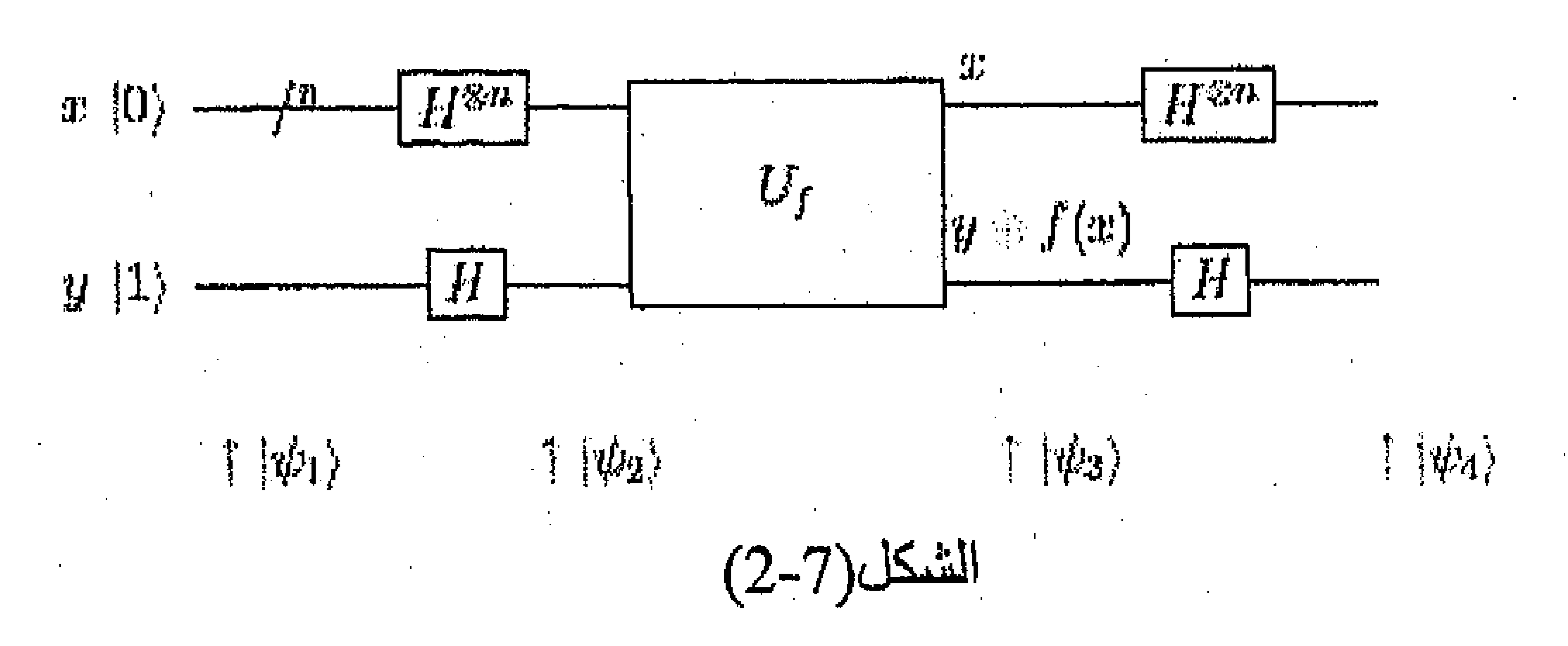
6-3-1 تعريف بالمشكلة

المشكلة التي نحاول حلها مختلفة قليلاً عن تلك التي قدمت في خوارزمية ديوتش، وهـي: هل $f(x)$ نفسه ثابت لكل المدخلات أم أنه يساوي 1 لنصف قيم المـدخلات و 0 للنـصف الآخر (بمعنى: أنه متوازن)؟

6-3-2 الحل الكمي

الدارة تبدوكما في الشكل(7-2):

مسجلا المدخل (x) و المخرج (y) لديهما بوابة H لكل كيوبت في المسجل. هذا مشار إليه ب($H^{\otimes n}$) و الرمز $/^n$ يعني فقط: عدد n من الأسلاك لعدد n من الكيوبتات. فيما يلـي



الشكل(7-2)

الخطوات من $|\psi_1\rangle$ إلى $|\psi_4\rangle$ التي نحتاجها لحل المشكلة بطريقة ميكانيكية كمية.

$|\psi_1\rangle$ المسجلان x و y أطلقا على التالي:

$$x = |0\rangle^{\otimes n}$$

$$y = |1\rangle$$

$|\psi_2\rangle$ تطبق بوابات H على كلا المسجلين x و y، لذا فإن متجه حالتنا الآن هو:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

$|\psi_3\rangle$ U_f تؤثر على المسجلين x و y (تذكر أن y هو مجرد كيوبت منفرد لأن نتيجة تقييم f هي: _ بالتعريف _0 أو 1 فقط). هذه المرة نستخدم $|\Psi\rangle = U_f|\psi_2\rangle|0\rangle = |x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle|y \oplus f(x)\rangle$ لتقييم $f(x)$.

$|\psi_4\rangle$ ترسل x عبر بوابة $H^{\otimes n}$ و y عبر بوابة H أيضاً. هذا يترك لنا مجموعة من كيوبتات المخرجات و 1 في مسجل الجواب؛ أي:

$$|\Psi\rangle = |x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle|1\rangle$$

الآن، القاعدة سهلة: إذا كان أي كيوبت في مسجل السؤال (x) هو $|1\rangle$، عندئذٍ يكون الاقتران متوازناً، عدا ذلك يكون الاقتران ثابتاً.

مثال(7-2):

هنا مثال بمسجل سؤال ثنائي الكيوبت للاقتران المتوازن f ، حيث:

$$f(00) = 0 \text{ و } f(01) = 0 \text{ و } f(10) = 1 \text{ و } f(11) = 1$$

لذا؛ في الحالة $|\psi_1\rangle$ لدينا:

$$|\Psi\rangle = |001\rangle$$

ثم في الحالة $|\psi_2\rangle$، بعد بوابات H لدينا:

$$|\Psi\rangle = \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$|\psi_3\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\left[\frac{|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle}{\sqrt{4}}\right]\left[\frac{|0\oplus f(x)\rangle-|1\oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}|00\rangle|0\oplus f(00)\rangle-|00\rangle|1\oplus f(00)\rangle+|01\rangle|0\oplus f(01)\rangle-|01\rangle|1\oplus f(01)\rangle\\+|10\rangle|0\oplus f(10)\rangle-|10\rangle|1\oplus f(10)\rangle+|11\rangle|0\oplus f(11)\rangle-|11\rangle|1\oplus f(11)\rangle\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(|000\rangle-|001\rangle+|010\rangle-|011\rangle+|101\rangle-|100\rangle+|111\rangle-|110\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(|000\rangle-|001\rangle+|010\rangle-|011\rangle-|100\rangle+|101\rangle-|110\rangle+|111\rangle\right)$$

$$=\left[\frac{|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle}{\sqrt{4}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$|101\rangle$ $\otimes$ $\otimes$

أن اقتراننا متوازن.

6-4 خوارزمية شور Shor's Algorithm

6-4-1 تحويل فوريير الكمي The Quantum Fourier Transform

المناظر الكمي لتحويل فوريير المحدد (انظر فصل 4) هو: تحويل فوريير الكمي (QFT). يقوم DFT بأخذ متسلسلة من N من الأعداد المركبة $X_{N-1},\ldots,X_1,X_0$ و إنتاج متسلسلة من الأعداد المركبة $Y_{N-1},\ldots,Y_1,Y_0$. بالمثل؛ تأخذ QFT متجه الحالة:

$$|\Psi\rangle=\alpha_0|0\rangle+\alpha_1|1\rangle+\ldots+\alpha_{N-1}|N-1\rangle \tag{6.1}$$

و تؤدي DFT على سعات $|\Psi\rangle$ معطيةً إيانا:

$$|\Psi\rangle=\beta_0|0\rangle+\beta_1|1\rangle+\ldots+\beta_{N-1}|N-1\rangle \tag{6.2}$$

الفائدة الرئيسية ل(QFT) حقيقةً هي أنها تستطيع عمل DFT لتراكب الحالات. يمكن عمل هذا على التراكب كالتالي:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\left(|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle\right)$$

أو بحالة تكون سعات الاحتمال لها ذات قيم مختلفة، مثلاً؛ الحالة التالية لها نطاقات احتمال تساوي 0 لحالات الأساس الرئيسية:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|001\rangle+|011\rangle-|111\rangle\right)$$

من المفيد في الأجزاء القليلة اللاحقة استخدام أعداد صحيحة integers لدى وصفنا حالات بأعداد كبيرة من الكيوبتات، لذا؛ فإن الحالة السابقة يمكن كتابتها:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle+|3\rangle-|7\rangle\right)$$

إن QFT هي مؤثر وحدوي و عكوسي. و في الحقيقة فإننا نستخدم الاقتران العكسي لتحويل فوريير الكمي inverse quantum Fourier transform ($QFT^{\dagger}$) لخوارزمية شور .سنعرف QFT :

لدينا متجه الحالة $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle=\sum_{x=0}^{2^{n-1}}\alpha_x|x\rangle \tag{6.3}$$

حيث: n هي عدد الكيوبتات. نعرف QFT كالتالي:

$$|\Psi'\rangle=QFT|\Psi\rangle=\sum_{x=0}^{2^{n-1}}\sum_{y=0}^{2^{n-1}}\frac{\alpha_x e^{2\pi ixy/2^n}}{\sqrt{2^n}}|y\rangle \tag{6.4}$$

بإمكاننا تمثيل QFT أيضاً كمصفوفة:

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{2^n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(2^n-1)}\\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(2^n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{2^n-1} & \omega^{2(2^n-1)} & \dots & \omega^{(2^n-1)(2^n-1)}\end{bmatrix} \tag{6.5}$$

حيث: $\omega = e^{2\pi i/2^n}$

كيف حصلنا على المصفوفة؟ لجعل الكيفية سهلة الفهم سنعرف الجزء الأهم من المجموع الذي نحتاجه لتمثيل المصفوفة (الذي سنعنونه ب: M_{xy}):

$$\sum_{x=0}^{2^n-1}\sum_{y=0}^{2^n-1}\frac{\alpha_x e^{2\pi ixy/2^n}}{\sqrt{2^n}}|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left(\sum_{y=0}^{2^n-1} M_{xy}\alpha_x\right)|y\rangle \qquad (6.6)$$

حيث: $M_{xy} = e^{2\pi ixy/2^n}$

و الآن باستخدام المجاميع، لدينا هنا بعض قيم x و y ل (M_{xy}):

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\begin{bmatrix} e^{2\pi i.0.0/2^n} = e^0 = 1 & e^{2\pi i.1.0/2^n} = e^0 = 1 & \dots \\ e^{2\pi i.0.1/2^n} = e^0 = 1 & e^{2\pi i.1.1/2^n} = e^{2\pi i/2^n} = \omega & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (6.7)$$

لنلق نظرة على مثالين يستخدمان تمثيل QFT المصفوفاتي.

مثال(6-3): QFT لكيوبت واحد بسيط. لدينا ما يلي:

$$|\Psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle$$

$$\Psi' = QFT\,\Psi$$

سنستخدم التمثيل المصفوفاتي و الذي هو:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{i\pi} \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة حقيقةً ما هي إلا بوابة H (لأن $e^{i\pi} = -1$)، لذا نحصل على:

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{i\pi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|1\rangle$$

مثال(6−4): QFT لكيوبتين. لدينا:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\Psi'\rangle = QFT|\Psi\rangle$$

التمثيل ألمصفوفاتي هو:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\pi i/4} & e^{\pi i2/4} & e^{\pi i3/4} \\ 1 & e^{\pi i2/4} & e^{\pi i4/4} & e^{\pi i6/4} \\ 1 & e^{\pi i3/4} & e^{\pi i6/4} & e^{\pi i9/4} \end{bmatrix}$$

لذا؛ $|\psi'\rangle$ هي:

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\pi i/4} & e^{\pi i2/4} & e^{\pi i3/4} \\ 1 & e^{\pi i2/4} & e^{\pi i4/4} & e^{\pi i6/4} \\ 1 & e^{\pi i3/4} & e^{\pi i6/4} & e^{\pi i9/4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi i3/4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi i6/4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi i9/4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi i 3/4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi i 6/4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi i 9/4} \end{bmatrix}$$

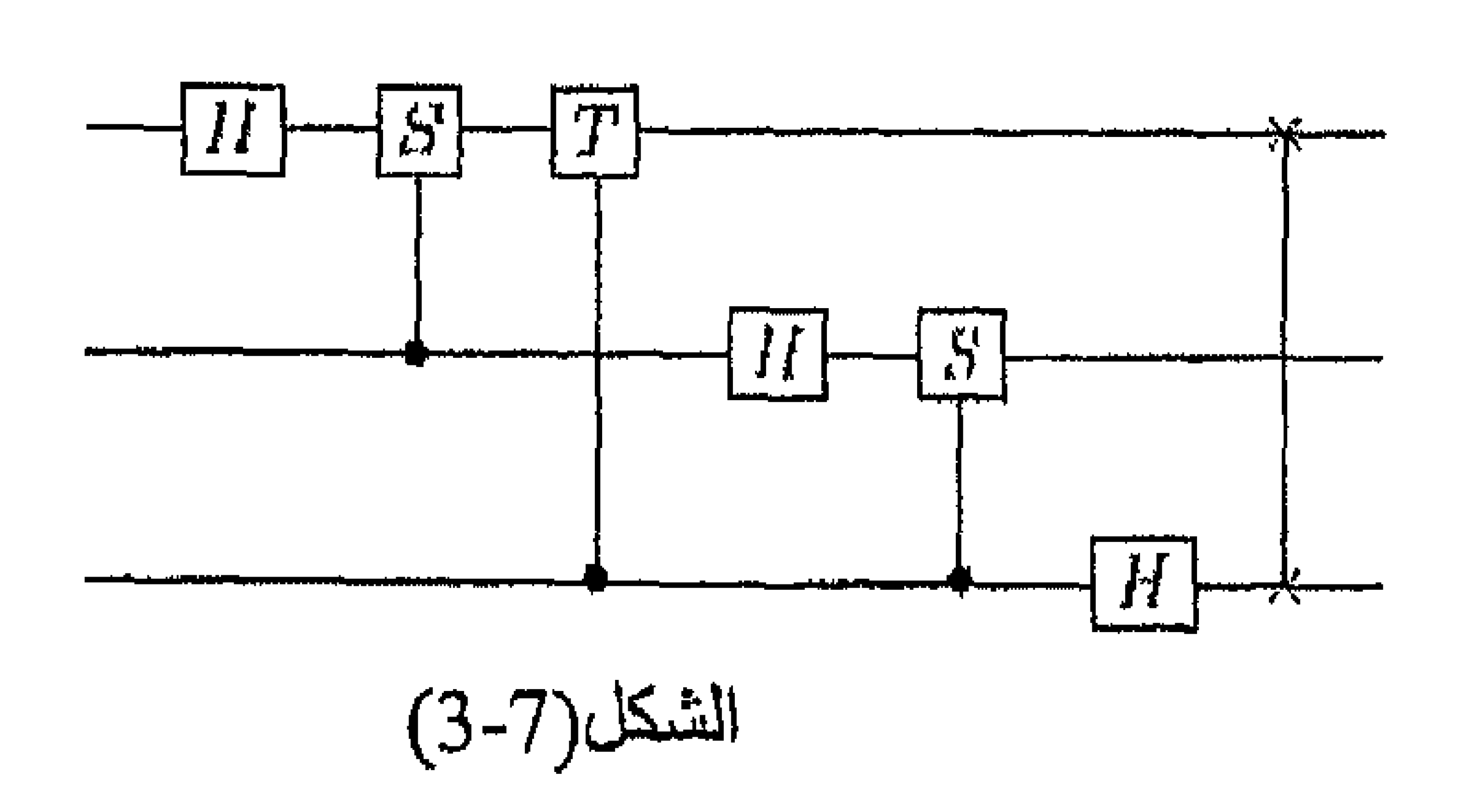
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{8}} \\ \frac{\sqrt{2}-1+i}{4} \\ \frac{1-i}{\sqrt{8}} \\ \frac{\sqrt{2}+1+i}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{8}}|00\rangle + \frac{\sqrt{2}-1+i}{4}|01\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{8}}|10\rangle + \frac{\sqrt{2}+1+i}{4}|11\rangle$$

6-4-2 كيف نوظف QFT ؟

كما تم تقديمه سابقاً؛ QFT لكيوبت واحد له الدارة البسيطة التالية(الشكل(7-3)):

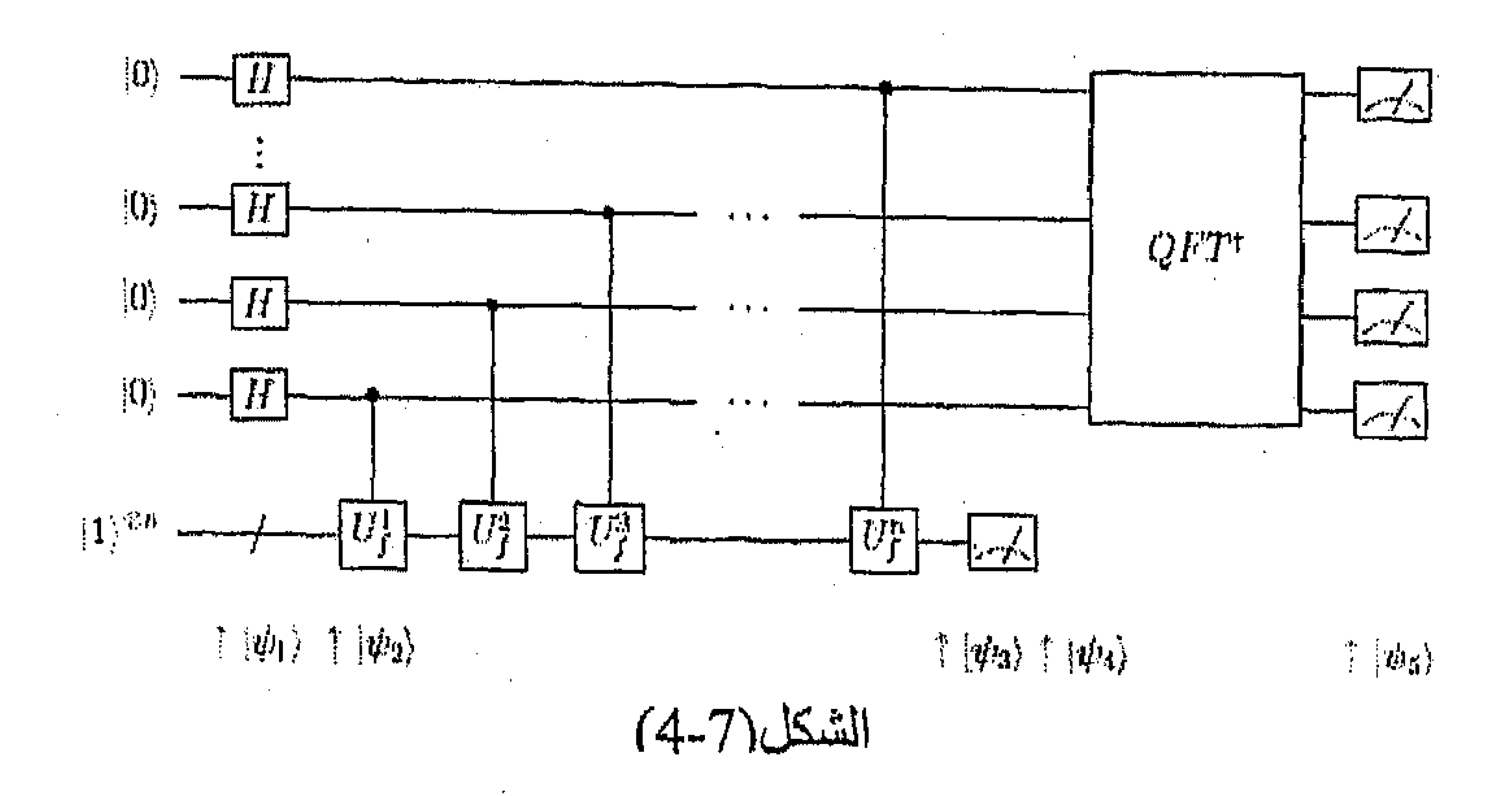




الشكل(7-3)

QFT لثلاثة كيوبتات له دارة أعقد:

نستطيع أن نسحب هذا المنطق لعدد n من الكيوبتات باستخدام H و $(n-2)$ من بوابات الدوران المختلفة (انظر أدناه R_k)، حيث:



الشكل(4-7)

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e^{i\pi 2/2^k} \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

لعدد n من الكيوبتات نستخدم بوابات $R_n,\ldots,R_2$. لمزيد من المعلومات حول دارات QFT الشاملة تحتاج لمراجعة مرجع خارجي مثل QCQI .

6-4-3 التحليل السريع إلى العوامل Fast Factorization

إن إيجاد العاملان المجهولان p و q بحيث: $p \times q = 347347$ بطيء جداً مقارنة بالمشكلة المعكوسة: حساب 156×129. حتى الآن لا نعرف خوارزميات سريعة من أجل التحليل إلى العوامل على الماكينات الكلاسيكية، و لكننا نعرف خوارزمية تحليل إلى العوامل سريعة نستطيع إدارتها على الحاسوب الكمي (شكراً لشور).

أنظمة فك التشفير ذات المفتاح الشعبي Public key encryption systems مثل خوارزمية RSA تعوّل على الحقيقة التي مفادها أنه من الصعب تحليل الأرقام الكبيرة إلى عواملها، إذا استطعنا إيجاد العوامل عندها يمكننا استخدام المعلومات المزودة في المفتاح الشعبي لفك شفرة الرسائل المشفرة بها. بلغة RSA مهمتنا سهلة. إذا أعطينا عدداً صحيحاً N، نعرف أن $n = pq$ حيث: p و q هما العددان الأوليان المراد حسابهما.

6-4-4 إيجاد الرتبة Order Finding

لتحليل N إلى عوامله؛ نقلص مسألة التحليل إلى العوامل إلى إيجاد الرتبة و التي هي:

لدينا $1 < x < N$ رتبـــة x mod N هـــي القيمـــة الأصـــغر لـr ، حيـــث: $r \geq 1$ و $x^r \bmod N = 1$. هذا يعني أن قائمة القـــوى لـx ؛ $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots, \bmod N$ ســـتتكرر بدورة أقل من N .

سنحاول إيجاد الدورة لاقتران دوري، لماذا؟ لأنه يثبت في النهاية أن هناك اتصال مغلـــق بين إيجاد العوامل و إيجاد دورة الاقتران الدوري. من البديهي أن تكون الحواســـيب الكميـــة جيدة في هذا بسبب الموازاة الكمية quantum parallelism؛ ما يعني قدرتها على حـــساب قيم اقترانات عديدة بشكل متوازٍ، و عليه؛ تكون قادرةً علـــى بلـــوغ "الخـــصائص الـــشاملة" للاقتران (كما في خوارزمية ديوتش).

مثال(7-5):

لنقل أن لدينا $N = 55$ ، و اخترنا x لتكون 13 ،

$$13^0 \bmod 55 = 1 ،$$

$$13^1 \bmod 55 = 13 ،$$

$$13^2 \bmod 55 = 4 ،$$

$$\vdots$$

$$13^{20} \bmod 55 = 1 .$$

لذا؛ $r = 20$ ، أي : $13 \bmod 55$ لها دورة بـ20 .

يمكن حساب $x \bmod N$ في زمن متعدد الحدود polynomial time و بالتـــالي يمكـــن إنجازها على الحاسوب الكلاسيكي. حال يكون لدينا رتبـــة r ، نـــستطيع تطبيـــق حـــسابات كلاسيكية أكثر لها للحصول على المعامل لـN .

الجزء "الكمي" يعطينا الدورة r في زمن متعدد الحدود باستخدام عملية تـــسمى: "تخمـــين الطور" phase estimation. عملية تخمين الطور تحاول تحديد القيمة المجهولة γ لقيمـــة آيغن $e^{2\pi i\gamma}$ لمتجه مميز $|u\rangle$ لمؤثر وحدوي U. لن نقلق على فهم عملية تخمين الطور لأن لخوارزمية شور عدداً من الخطوات المعينة التي تجعل من تعلمها أمراً غير ضروري. قبـــل النظر إلى خوارزمية شور، هناك مركب ضروري لخوارزمية شور سيقدم هو: خوارزميـــة الكسور المتصلة the continued fractions algorithm.

6-4-5 خوارزمية الكسور المتصلة The Continued Fractions Algorithm

تسمح خوارزمية الكسور المتصلة لنا بحساب مصفوفة من الأعداد الصحيحة لتمثيل الكسر. نقوم ببساطة بفصل الكسر إلى جزأيه: الصحيح و ألكسري، نحتفظ بالجزء الصحيح و نكرر العملية حتى لا يتبقى لدينا أجزاءً كسرية.

مثال(6-7) : حول $\frac{11}{9}$ إلى تمثيل مصفوفة أعداد صحيحة.

$$\begin{aligned}\frac{11}{9} &= 1+\frac{2}{9}\\ &= 1+\frac{1}{\frac{9}{2}}\\ &= 1+\frac{1}{1+\frac{9}{2}}\\ &= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

لذا؛ نخرج بالقائمة التالية:

$$[1,1,4,2]$$

التي هي مصفوفة أربعة عناصر لتمثيل $\frac{11}{9}$ (وأخذت أربع خطوات).

نأتي الآن إلى خوارزمية التحليل السريع إلى العوامل...

6-4-6 دارة و خوارزمية التحليل السريع إلى العوامل

The Fast Factorisation Circuit and Algorithm

الخوارزمية المقدمة هنا شبيهة بخوارزمية شور وتستخدم QFT آنف الذكر. إنها بسيطة؛ فلو أعطينا العدد N ليحلل إلى عوامله، تكون الخوارزمية لاسترجاع العامل f حيث $f>1$ كالتالي:

1. إذا كان N قابلاً للقسمة على 2 عندها استرجع $f=2$.

2. ل$(a \geq 1$ و $b \geq 2)$ إذا كان $N = a^b$، عندئذٍ استرجع f=a (نستطيع اختبار هذا بطريقة كلاسيكية).

3. بشكل عشوائي؛ اختر عدداً صحيحاً x حيث: $1 < x < N$. نستطيع بكفاءة اختبار فيما إذا كان عددان يشتركان بقاسم مشترك common divisor في الحاسوب الكلاسيكي. هناك خوارزمية كلاسيكية فعالة لاختبار فيما إذا كانت الأعداد أولية coprime وهي التي يكون قاسمها المشترك الأكبر greatest common divisor gcd يساوي 1. في هذه الخطوة نختبر ما إذا كان $\gcd(x,N) > 1$، فإذا كان كذلك نقوم باسترجاع $f = \gcd(x,N)$. مثلاً: إذا كانت x=3 نجد $\gcd(3,15) = 3$ لذا نسترجع 3 .

4. ولدى حلول الحاسوب الكمي، نقوم بتطبيق خوارزمية إيجاد الرتبة الكمية. قبل البدء نحتاج إلى تعريف حجم مسجلات المدخلات: المسجل الأول نحتاج أن يكون t -كيوبت في حجمه بحيث: $2N \leq t$ (هذا لتقليل فرص الأخطاء في المخرجات، و هناك ما يبدو انه خلاف في مادة المرجع بسبب ما يجب أن يكون الحد الأدنى)، و المسجل الثاني يحتاج أن يكون L -كيوبت في حجمه حيث L هو عدد الكيوبتات اللازمة لخزن N .

$|\psi_1\rangle$ تستهل المسجل الأول الذي هو t -كيوبت في حجمه ل$(|0\rangle^{\otimes t})$ و المسجل الثاني الذي هو L -كيوبت في حجمه ل$(|1\rangle^{\otimes L})$.

$|\psi_2\rangle$ تخلق تراكباً على المسجل الأول:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \sum_{r_1=0}^{2^t-1} |R_1\rangle |1\rangle$$

$|\psi_3\rangle$ تطبق $U_f R_2 = x^{R_1} \bmod N$ للمسجل الثاني:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \sum_{r_2=0}^{2^t-1} |R_1\rangle |x^{R_1} \bmod N\rangle$$

$|\psi_4\rangle$ نقوم بقياس المسجل الثاني لأنه يتشابك مع المسجل الأول و تصبح حالتنا مجموعة جزئية من القيم في المسجل الأول التي تترافق مع القيمة التي شاهدناها في المسجل الثاني.

$|\psi_5\rangle$ نطبق $\mathrm{QFT}^\dagger$ للمسجل الأول ثم نقوم بقياسه.

$|\psi_6\rangle$ (غير مشاهدة) الآن نطبق خوارزمية الكسور المتـصلة ل($\frac{|\psi\rangle}{2^t}$) و يكـون عـدد الخطوات التي تأخذها هو الدورة r .

5. بالاعتماد على النتيجة r ، اختبر أولا فيما إذا كانت r زوجيا $x^{r/2} \neq -1 \bmod N$ ، ثم احسب $f = \gcd\left(x^{r/2} \pm, N\right)$ ، إذا لم تكن النتيجة 1 أو N عندها استرجع f على أنها معامل، عدا ذلك تفشل الخوارزمية و علينا البدء من جديد.

فيما يلي سنطلع على زوجين من الأمثلة المحلولة لخوارزمية شور.

مثال(6-7): أوجد عوامل N=15 .

1- N ليس عدداً زوجياً، استمر.

$N \neq a^b$

3- سنختار : $x = 7$ و $\gcd(7,15) = 1$ لذا، استمر.

4- تساوي 11 كيوبت للمسجل الأول، و L تساوي 4 للمسجل الثاني.

$|\psi_1\rangle$

$$|\Psi\rangle = |000000000001111\rangle$$

$|\psi_2\rangle$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2048}}\left(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \ldots + |2047\rangle\right)|15\rangle$$

$x^{R_1} \bmod 15$

R_1	$\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	$\|3\rangle$	$\|4\rangle$	$\|5\rangle$	$\|6\rangle$	$\|7\rangle$	$\|8\rangle$	$\|9\rangle$	$\|10\rangle$	.....
R_2	$\|1\rangle$	$\|7\rangle$	$\|4\rangle$	$\|13\rangle$	$\|1\rangle$	$\|7\rangle$	$\|4\rangle$	$\|13\rangle$	$\|1\rangle$	$\|7\rangle$	$\|4\rangle$	.....

$|\psi_4\rangle$ R_2 $|\Psi\rangle$

R$_1$			$\|2\rangle$				$\|6\rangle$				$\|10\rangle$	.....
R$_2$			$\|4\rangle$				$\|4\rangle$				$\|4\rangle$	

تذكر أن كلا المسجلين حقيقةً جزء من نفس متجه الحالة. من الملائم أن نفكر فيهما بشكل

$$R_2$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{512}}\left(|00000000010\mathbf{1000}\rangle + |0000000011 0\mathbf{1000}\rangle + \ldots\right)$$

$|\psi_5\rangle$ بعد تطبيق $QFT^\dagger$ نحصل إما على 0 ، 512 ، 1024 أو 1536 باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$

$|\psi_6\rangle$ $\qquad \left.\frac{1536}{2048}\right)$

5- r عدد زوجي و يحقق $\frac{r}{2} \neq -1 \bmod N$، لذا سنحاول $\gcd(7^2 - 1,15) = 3$ و $\gcd(7^2 + 1,15) = 5$. الآن، و باختيار أن: $N = 15 = 3 \times 5$ نرى أننا أوجدنا عواملنا.

مثال(6-8) : أوجد عوامل N=55

1-و2- N ليس عدداً زوجياً، و $N \neq a^b$ لذا استمر.

3- نختار $x = 13$ و $\gcd(13,55) = 1$ لذا استمر.

4- t يساوي 13 كيوبت للمسجل الأول، و L يساوي 6 كيوبتات للمسجل الثاني.

$|\psi_1\rangle$

$$|\psi\rangle = |0000000000000111111\rangle$$

$|\psi_2\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8192}}\left(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \ldots + |8191\rangle\right)|63\rangle$$

$x^{R_1} \bmod 55$

R_1	$\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	......	$\|8192\rangle$
R_2	$\|1\rangle$	$\|13\rangle$	$\|4\rangle$	......	$\|2\rangle$

$|\psi_4\rangle$ R_2 $|\psi\rangle$

R_1	$\|9\rangle$	$\|29\rangle$	$\|49\rangle$	......	$\|8189\rangle$
R_2	$\|28\rangle$	$\|28\rangle$	$\|28\rangle$	......	$\|28\rangle$

لذا؛ يبدو متجه الحالة (أي؛ بكلا المسجلين) هكذا:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{410}}\left(|9\rangle|28\rangle + |29\rangle|28\rangle + |49\rangle|28\rangle + \ldots + |8189\rangle|28\rangle\right)$$

$|\psi_5\rangle$

$|\psi_6\rangle$ $\frac{4915}{8192}\Big)$

5- r عدد زوجي يحقق $\frac{r}{2} \neq -1 \bmod N$ ، لذا نحاول $\gcd(13^{10}-1,55)=5$ و $(13^{10}+1,55)=11$

الآن، و باختبار أن $N = 55 = 5\times 11$ نرى أننا الآن أوجدنا عواملنا.

6-5 خوارزمية غروفر Grover's Algorithm

توفر لنا خوارزمية غروفر تسريعاً تربيعياً للتنوع الواسع لخوارزميات البحث الكلاسيكية. أكثر الأمثلة الشائعة لخوارزميات البحث التي تستطيع الإفادة من البناء الكمي هي: "خوارزميات إيجاد الطريق الأقصر" shortest route finding algorithm و خوارزميات لإيجاد عناصر محددة في قاعدة بيانات غير مفروزة.

6-5-1 مسألة البائع المتجول The Traveling Salesman Problem

مسألة البائع المتجول هي مثال على إيجاد الطريق الأقصر. ببساطة؛ لدينا عـدد مـن المدن المتصلة فيما بينها وتبعد مسافة معينة عن بعضها، هل هناك طريق يـستطيع البـائع زيارة كل مدينة بواسطته بحيث تكون أقل من k من الكيلومترات (أو الأميال)؟

نستطيع بخوارزمية غروفر أن نكمل البحث عن الطريق ذي الكيلومترات الأقل مـن k بخطوات $O(\sqrt{N})$ بدل خطوات بمعدل $\frac{N}{2}$ (التي تكون $O(N)$) في الحالـة الكلاسـيكية. افترض أن لدينا M من الحلول المختلفة لـ(k)، عندئذٍ يكون التركيب الزمنـي لخوارزميـة غروفر $O\left(\sqrt{\frac{M}{N}}\right)$.

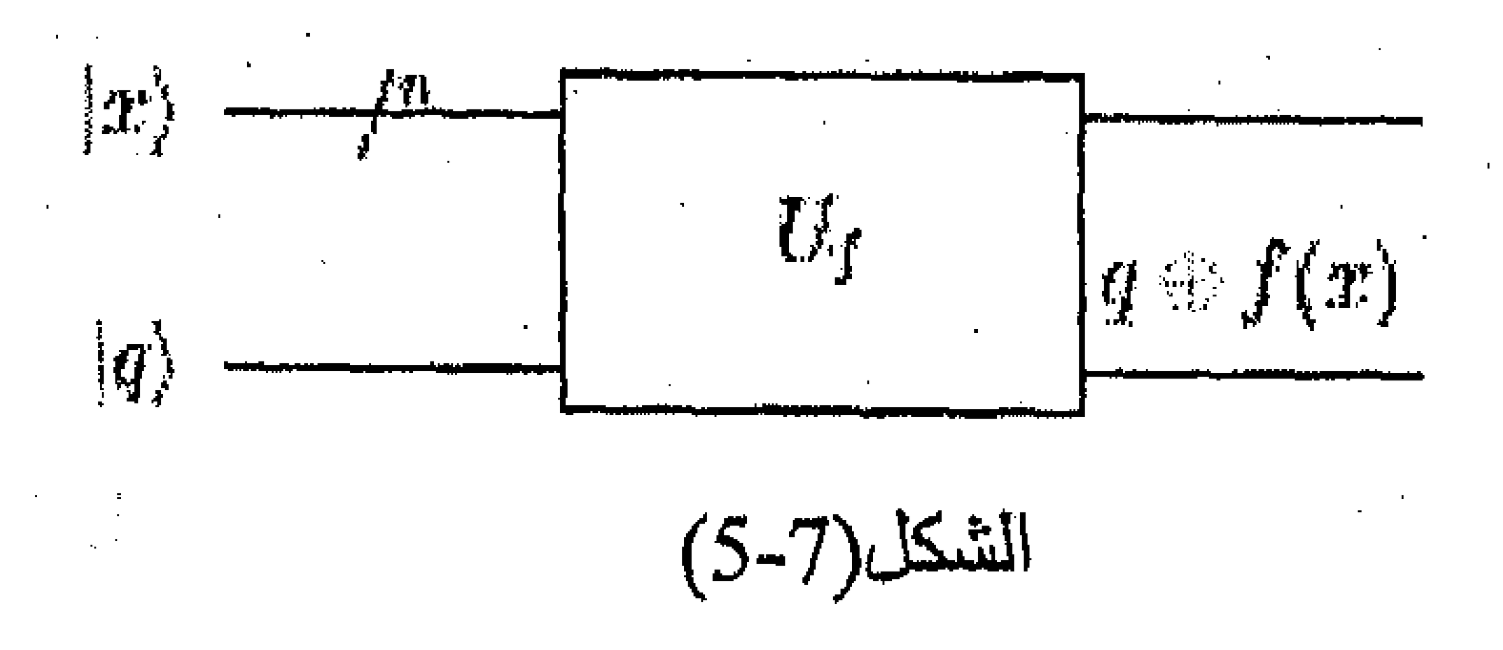
6-5-2 البحث الكمي Quantum Searching

العنصر 1	0
العنصر 2	1
العنصر 3	2
⋮	⋮
العنـــصر N	N-1

بهدف شرح خوارزميات نوع غروفـر سنـستخدم جدول قاعدة بيانات غير مفروزة كمثال. لدينا جدول قاعدة بيانات بـN من العناصر بدليل i (من الأفضل أن نختار N بحيث تكون تقريباً 2^n حيث n هي عدد الكيوبتـات). جدولنا مبين في الأسفل:

افترض وجود M من الحلول بحيث: $1 < M \leq N$.

بطريقةٍ مماثلة لخوارزمية ديوتش نستخدم أوراكيل لتقرير ما إذا كان x كدليل معين هو



الشكل(5-7)

حل مميز للمسألة، أي:

F(x)=1 إذا كان x هو الحل

F(x)=0 عدا ذلك.

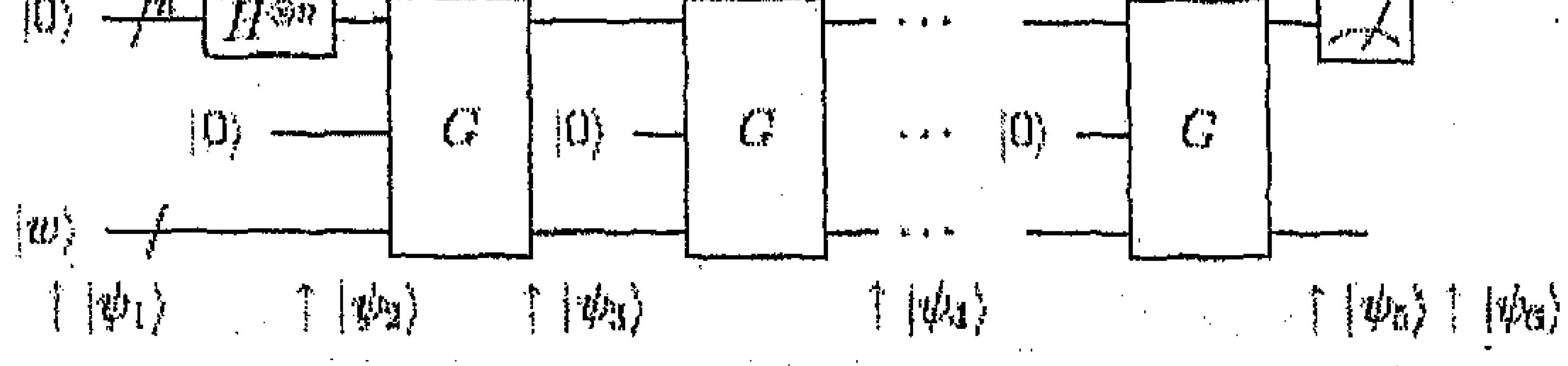
يمكن لخوارزمية البحث أن تصنع من عدة أوراكيلات، وتكون اقترانات الاوراكيل مشابهة جدا لخوارزمية ديونش-جوزا، كما هو مبين أدناه:

$$|x\rangle|q\rangle \rightarrow O \rightarrow |q \oplus f(x)\rangle \qquad (6.9)$$

$|x\rangle$ هنا هي مسجل و $|q\rangle$ هي كيوبت و O هـي أوراكيـل. دارة الاوراكيـل تبـدو كالشكل(7-5):

كما في خوارزمية ديوتش-جوزا؛ قمنا بإطلاق q على $|1\rangle$ و من ثم تمريره عبر بوابة H ، سيظهر الجواب في المسجل $|x\rangle$ و سيظهر $|q\rangle$ بعد الحساب كما هو، لذا سننتهي إلى:

$$|x\rangle \rightarrow O \rightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle \qquad (6.10)$$



الشكل(7-6)

إن الاقتران f(x) يحتوي على المنطق لنوع البحث الذي قمنا بإجرائه. بشكل نمـوذجي؛ هناك كيوبتات عمل إضافية موجهة للأوراكيل التي تتصرف ككيوبتات خادمة، و هذه تسمى: فضاء العمل للأوراكيل oracle's workspace (ممثلـة بـالرمز w). دارة خوارزميـة غروفر مبينة أدناه(الشكل(7-6):

خطوات الخوارزمية ل(M=1) تكون كالتالي:

$|\psi_1\rangle$ تستهل منازل الكيوبتات.

$|\psi_2\rangle$ نقوم بوضع $|x\rangle$ في تراكب:

$$|x\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}|x\rangle$$

$|\psi_3\rangle \leftarrow |\psi_5\rangle$ كل G يسمى: تكـرار غروفـر Grover iteration ، و يقـوم بـأداء الاوراكيل و قلب الطور المشروط conditional phase flip على $|x\rangle$ و هذا الأخير يعمل

على قلب الإشارة في كل الكيوبتات عدا تلك التي للكيوبت $|0\rangle$ معلمة بـCPE أدنـــاه. يـــتم عمل هذا بعد انطباق التراكب على $|x\rangle$ بواسطة $H^{\otimes n}$. بعد إتمام عملية القلب يـــتم إعـــادة وضع المسجل $|x\rangle$ في تراكب. كل G يبدو كالتالي:

لـ(M=1) نحتاج لتطبيق G $\left\lfloor \pi\sqrt{2^n}/4 \right\rfloor$ من المرات.

$|\psi_6\rangle$ أخيراً نقيس؛ إذا كان لدينا M=1 فإن المسجل $|x\rangle$ سيحوي الحل الوحيـــد، و إذا كان لدينا M>1 فإننا سنقيس_بشكل عشوائي_أحد الحلول الممكنة.

تصوير خوارزمية غروفر:

يمكننا تعريف تراكب حلول خوارزمية غروفر كالتالي:

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{=} |x\rangle \qquad (6.11)$$

و تراكب القيم التي ليست بحلول:

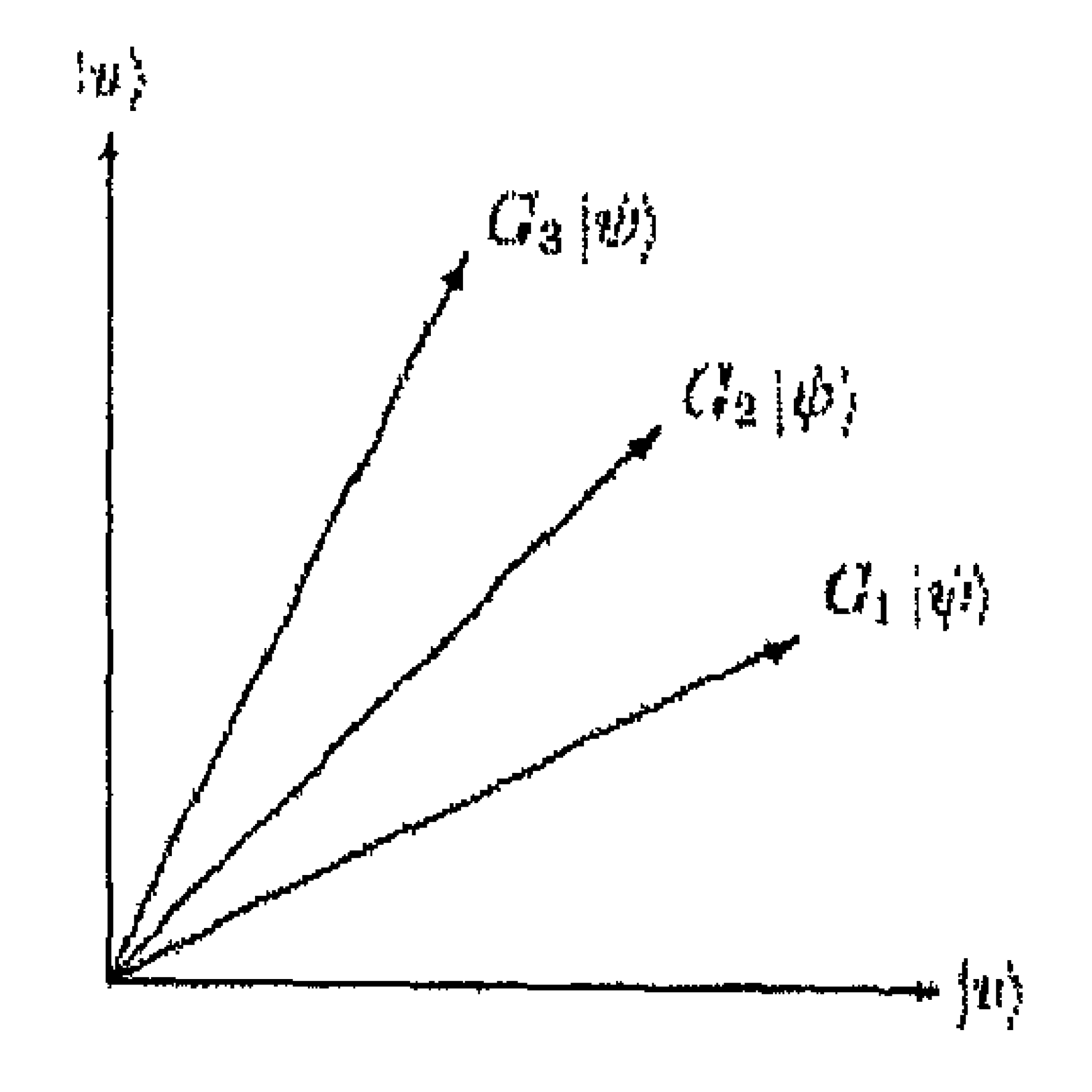
$$|\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{\neq} |x\rangle \qquad (6.12)$$

يوضح الشكل (7-7) العملية الخاصة بخوارزمية غروفر كسلسلة دورانات $|\psi\rangle$ من $|\nu\rangle$ إلى $|u\rangle$، حيث يتم عمل كل دورة منفردة بواسطة G : تكرار غروفر.

فيما يلي مثال بسيط.

مثال(6-9):

افترض أن لدينا دليلاً حجمـــه 4 و الذي يعطينا N=4 . لدينا حـــل وحيـــد، لذا؛ M=1 و لاقتراننا f(x) حل مميـــز في x=0 ، هذا يماثل قولنا: أن العنصر الذي نبحث عنه يوجد في الدليل i=0 ؛ هذه النتائج عائـــدة بواســـطة اســـتدعاء



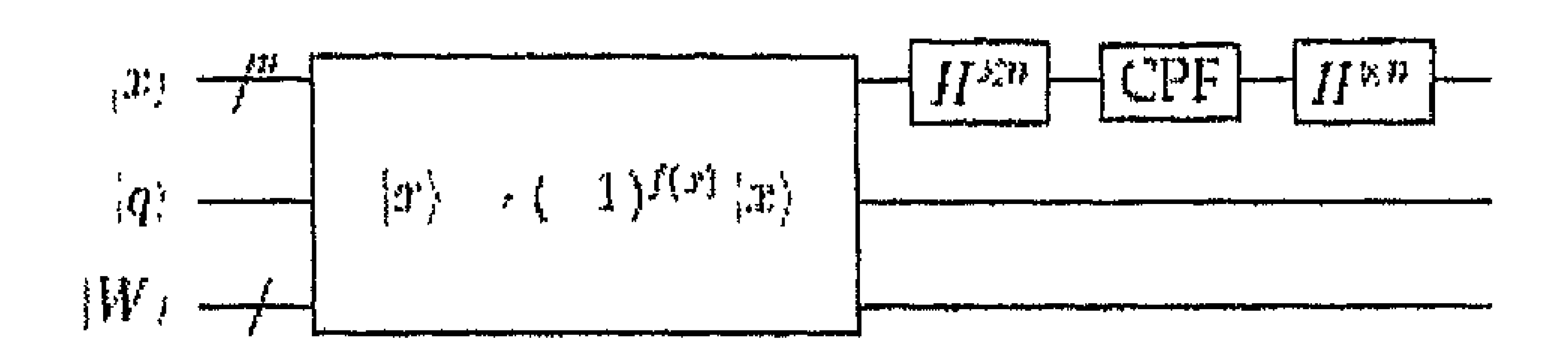
الشكل (7-7): تصوير خوارزمية غروفر

الاوراكيل: $f(3)=0$ و $f(2)=0$ و $f(1)=0$ و $f(0)=1$.

حجم المسجل $\langle x|$ هو كيوبتان. لدينا أيضا فضاء عمل بكيوبت واحد (أطلقنا عليه $\langle 1|$) و الذي نمرره عبر بوابة H في نفس الوقت الذي تقوم فيه الكيوبتات في $\langle x|$ بالمرور ابتـداءً ببوابات H الخاصة بها (في هذا المثال سنهمل كيوبت الاوراكيل q). خطوات الخوارزمية

$|\psi_1\rangle$ $\quad |\Psi\rangle = |001\rangle$

$|\psi_2\rangle$ $\quad |w\rangle$



$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}[|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle]$ و $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - |1\rangle]$.

$|\psi_3\rangle$ كل ما نحتاجه لدوران $\langle x|$ لتتصل ب $\langle u|$ هو تكرار غروفـر المنفـرد (الحـل

$|\psi_5\rangle$

$|x\rangle = |00\rangle$

الفصل السابع
استخدام أجهزة الميكانيك الكمي
Using Quantum Mechanical Devices

7-1 المقدمة

طرق الصناعة هذه الأيام تصنع الدارات التكاملية (الشكل (7-1)) باستخدام الترانزستورات ذات سعة تقدر بالمايكرون. وكلما أصبحت صغيرة، ستصبح الدارات التكاملية أسرع. إن قدرة الحاسوب تتضاعف كل بضع سنوات (طبقا لقانون مور) وسوف نصل بسرعة إلى العتبة التي وراءها سوف لا يعمل الترانزستور بسبب تأثيرات الكم. عند عشرة نانومترات (التي نحن قريبين منها الآن) يمكن للإلكترون أن يخترق المسافات بين أجزاء الدارة، لذلك فإن تكنولوجيا الترانزستور من المحتمل أن تكون مستحيلة التقلص أكثر.

في سنة 1989 بنى Niel Garshefeld جهاز كيوبت بعد ذلك في سنة 20000 بنى Rag Laflemme حاسوب كمي ذو سبعة كيوبتات. في الوقت الحالي لا نزال مقتصرين على عشرة كيوبتات ومئات من البوابات بتوظيفات بطيئة ومزاجية. إن معماريات هذه المكائن تختلف، حتى أن العلماء يتكلمون عن استخدام أكواب القهوة وكميات صغيرة من الكلوروفورم لبناء حاسوب كمي يعمل.

7-2 الإدراك الفيزيائي Physical Realisation

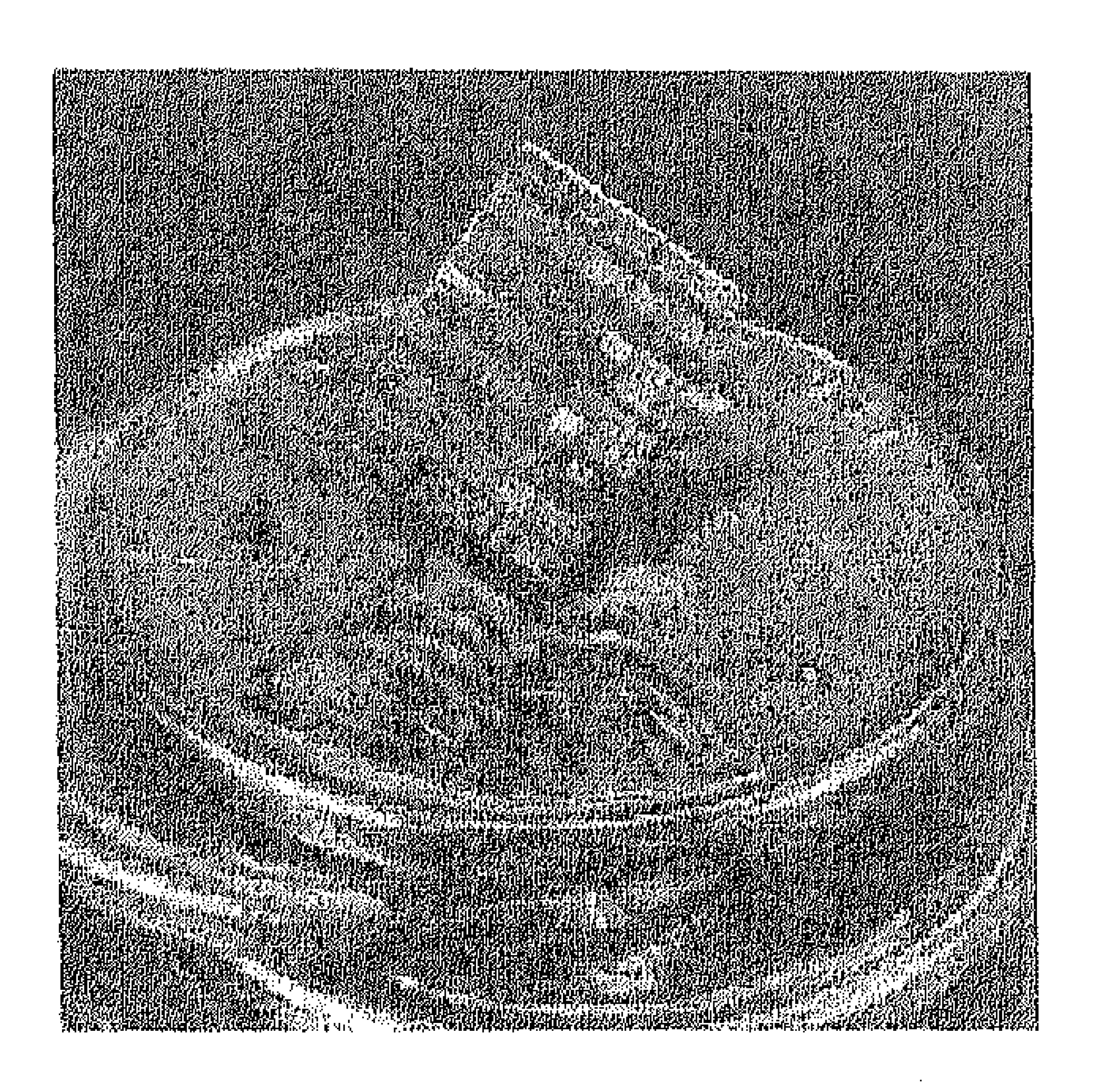
سنلقي نظرة سريعة على الإدراك الفيزيائي هنا، ولكن نحذر للتفاصيل المتوقعة. إن هذا البند هنا للإتمام وبصراحة فهو مقدمة فقط. طبقا ل Nielson and Caung هناك أربع متطلبات أساسية للتضمينات الفيزيائية للحاسوب الكمي وهي:

1- تضمين الكيوبت Qubit implementation

إن أكبر مشكلة تواجه الحوسبة الكمية هي الطبيعة الغير ثابتة للمركبات الصغيرة جدا التي تتعامل معها. الكيوبتات يمكن أن تزود بطرق مختلفة، مثال حالات البرم لجسيم، الحالات الأرضية والمتهيجة للذرات، واستقطاب الضوء.

هناك عدة اعتبارات لتزويد الكيوبتات: إحدى هذه الاعتبارات هي زمن إزالة التشاكه العالي(الثبوتية المنخفضة أو الإستقررية المنخفضة). على سبيل المثال 10^{-3} ثانية لبرم إلكترون، و 10^{-6} ثانية لنقطة كمية quantum dot (نوع من الذرات الصناعية). اعتبار آخر هو السرعة، كما كان تفاعل تزويد الكيوبتات قويا مع المحيط كلما كان الحاسوب أسرع. على سبيل المثال يعطينا البرم النووي"سرعة ساعة" أبطأ من برم الإلكترون لأن البرم النووي يتفاعل بضعف مع العالم الخارجي.

هناك نوعان من الكيوبتات، الكيوبتات المادية مثل البتات التي وصفت أعلاه والكيوبتات الطائرة (اعتياديا الفوتونات) الكاوابتات الثابتة من المرجح أن تكون أساس البناء المادي الكمي، بينما البتات الطائرة فمن المرجح أن تستخدم للاتصال.



الشكل(7-1): شريحة سلكون

2-السيطرة على التطور الأحادي: أي كيف نسيطر على تطور الدارات؟

1- تحضير الحالة الابتدائية (الكيوبتات) إنشاء مقادير الكيوبتات الابتدائية.

نحن بحاجة إلى أن نكون قادرين على الرجوع لمقادير الكيوبتات إلى حالة مثل ⟨.....000|. هذا ليس فقط للمقادير الابتدائية للدارة. على سبيل المثال تصحيح الخطأ الكمي يحتاج إلى تجهيز ثابت لكيوبتات كمية مستقرة التي تم الرجوع بمقادير إلى الحالة الابتدائية مسبقا.

2- **قياس الحالات النهائية:** قياس الكيوبتات نحن بحاجة لفعل هذا بطريقة لا تزعج الأجزاء الأخرى للحاسوب الكمي. وكذلك فنحن بحاجة إلى أن نتأمل فيما إذا كان القياس هو

قياس غير تالف الذي على سبيل المثال يترك الكيوبت في الحالة التي يمكن أن تستخدم لاحقا للرجوع إلى الحالة الابتدائية. قضية أخرى هي أن تقنيات القياس هي ليست كاملة، وعليه فيجب علينا أن نفكر "باستنساخ" مقادير من الكيوبتات الخارجة واستخراج معدل النتائج. كذلك فقد اقترح David P.Divenco متطلبين أساسيين آخرين.

3- أزمان إزالة التشاكه يجب أن تكون أطول بكثير من أزمان البوابة الكمية.

4- مجموعة فنية من البوابات الكمية المكوية.

7-2-1 تقنيات التضمين Implementation Techniques

هناك العديد من الطرق النظرية لتضمين الحاسوب الكمي جميعها في الوقت الحاضر يعاني من scalabilityالضعيفة. سنذكر هنا طريقتين مهمتين.

- **الحاسوب الفوتوني البصريOptical photon computer** إن هذا أبسط أنواع الحاسوب الكمي الذي يمكن أن يفهم. إحدى الطرق التي يمكن تمثيل الكيوبتات بها هي بواسطة طرق الاستقطاب المألوفة. أما البوابات فتمثل بشاطرات الحزمة beam splitters. ينجز القياس بكشف الفوتونات المنفردة و تحضير الحالة الابتدائية يتم بواسطة استقطاب الفوتونات. عمليا، لا تتفاعل الفوتونات بشكل جيد مع المحيط رغم وجود طرق جديدة تستخدم التشابك للتغلب على هذه المشكلة. بقي هناك مشاكل أخرى تتعلق بكشف الفوتونات المفردة (التي من الصعب إنجازها) وحقيقة أن الفوتونات يصعب السيطرة عليها لأنها تسير بسرعة الضوء.

- **الرنين النووي المغناطيسي Nuclear magnetic resonance** الذي يستخدم برم نواة الذرة لتمثيل الكيوبت. الأواصر الكيميائية بين البرم تستخدم المجال المغناطيسي لمحاكاة البوابات. يحضر البرم بمغنطة وتستخدم فولتية محثثة للقياس. يعتقد في الوقت الحالي أن NMR ليحتمل أكثر من عشرين كيوبتات.

العديد من البرم الذري يمكن أن يربط كيميائيا في جريئة. كل عنصر يصبح في حالة رنين عند تردد مختلف وبالتالي فباستطاعتنا استخدام برم مختلف بإنتاج نبضة موجة راديوية عند التردد الصحيح. هذا البرم "يدار" بواسطة النبضة الراديوية (مقدار الدوران يعتمد على سعة واتجاه الموجة). تنجز الحوسبة بسلسلة من النبضات معروفة الزمن والقياس. نحن

غير مقيدين باستخدام الذرات لأنها يمكن أن ترتبط لتكون سائل عياني بنفس حالة البرم لكل ذرات المركب. لقد تم إنجاز حاسوب سباعي الكيوبت من خمس ذرات وظفت برومها الكيوبتات.

لشرح هذه بالتفصيل يتعدى مستوى هذا الكتاب وهناك تقنيات أخرى كثيرة كأسر أيون (يؤسر عدد من الأيونات في صف في مجال مغناطيسي)، وطريقة SQUIDS (أجهزة التداخل الكمية فائقة التوصيل Superconducting quantum interference devices) وطريقة الإلكترونات على الهليوم السائل وطريقة الشبيكة البصرية والمذبذب التوافقي.

3-7 لغات الحاسوب الكمي Quantum Computer Language

بالرغم من عدم بناءِ حاسوب كمي لحد الآن إلا أن ذلك لم يوقف النمو السريع للبحوث المتعلقة بمختلف المفاهيم في الموضوع. العديد من هذه البحوث نشرت ما يتعلق بتعريف مميزات اللغة. بعض هذه اللغات مذكور أدناه.

الشكل (7-2): جهاز id Quantique's

- QCL مثيلة C وكاملة جدا.
- qGCL تشبه برمجة دالية و تدعي بأنها أحسن من QCL لأن الأخيرة لا تتضمن الاحتمالية واللاحدية، ليس لها فكرة تعديل برنامج، وتسمح فقط لمراقبات قياسية.
- C الكمية Quantum C : حاليا تعيين فقط مع فكرة جامع كمي quantum assembler.
- مصطلحات لشفرة شبه كمية Conventions for Quantum Pseudo Code: ليست حقيقة لغة لكنها طريقة جميلة لتمثيل الخوارزميات الكمية والعمليات.

4-7 أجهزة التشفير Encryption Devices

إن أول أجهزة التشفير باستخدام الصفات الكمية نوقش سابقا قد ترك. على سبيل المثـال، وحدة توزيع مفتاح كمي الذي طور من قبل id Quantique ومصور في الـشكل (8-2) . كذلك فقد أطلق جهاز آخر بواسطة MagiQ. سواء أصبحت أم لم تصبح هذه الأجهزة ناجحة على مستوى تجاري فإنها ستؤثر في مستقبل المجال.

المصادر والمراجع

Arizona.edu 1999, *Lecture 1* [Online]. Available: http://www.consciousness.arizona.edu/quantum/Library/qmlecture1.htm [Accessed 5 December 2004]

Baeyer, H. C. 2001, In the Beginning was the Bit, *New Scientist*, February 17

Banerjee, S. ? 2004, *Quantum Computation and Information Theory - Lecture 1* [Online]. Available: http://www.cse.iitd.ernet.in/\~suban/quantum/lectures/lecture1.pdf [Accessed 4 July 2004]

Barenco, A. Ekert, A. Sanpera, A. & Machiavello, C. 1996, *A Short Introduction to Quantum Computation* [Online]. Available: http://www.Qubit.org/library/intros/comp/comp.html [Accessed 30 June 2004]

Benjamin, S. & Ekert, A. ? 2000, *A Short Introduction to Quantum-Scale Computing*. [Online]. Available: http://www.qubit.org/library/intros/nano/nano.html [Accessed 4 July 2004]

Bettelli, S. 2000, *Introduction to Quantum Algorithms* [Online]. Available: sra.itc.it/people/serafini/quantum-computing/seminars/20001006-slides.ps [Accessed 5 December 2004]

Black, P.E. Kuhn, D.R. & Williams, C.J. ? 2000, *Quantum Computing and Communication* [Online]. Available: http://hissa.nist.gov/~black/Papers/quantumCom.pdf [Accessed 7 December 2004]

Blume, H. 2000, *Reimagining the Cosmos*. [Online]. Available: http://www.theatlantic.com/unbound/digicult/dc2000-05-03.htm [Accessed 4 July 2004]

Braunstein, S. L. & Lo, H. K. 2000, *Scalable Quantum Computers - Paving the Way to Realisation*, 1st edn, Wiley Press, Canada.

Bulitko, V.V. 2002, *On Quantum Computing and AI (Notes for a Graduate Class)*. [Online]. Available: www.cs.ualberta.ca/~bulitko/qc/schedule/qcss-notes.pdf [Accessed 10 December 2004]

Cabrera, B.J. ? 2000, *John von Neumann and von Neumann Architecture for Computers* [Online]. Available: http://www.salem.mass.edu/~tevans/VonNeuma.htm [Accessed 9 September 2004]

Castro, M. 1997, *Do I Invest in Quantum Communications Links For My Company?* [Online]. Available: http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_97/journal/vol1/mjc5/ [Accessed 4 July 2004]

Copeland, J. 2000, *What is a Turing Machine?* [Online]. Available: http://www.alanturing.net/turing_archive/pages/ReferenceArticles/WhatisaTuringMachine.html [Accessed 9 August 2004]

cs.umbc.edu.edu 2003, *Complexity Class Brief Definitions* [Online]. Available: http://www.csee.umbc.edu/help/theory/classes.shtml [Accessed 7 December 2004]

Dawar, A. 2004, *Quantum Computing - Lectures.* [Online]. Available: http://www.cl.cam.ac.uk/Teaching/current/QuantComp/ [Accessed 4 July 2004]

Dorai, K. Arvind, ?. Kumar, A. 2001, *Implementation of a Deutsch-like quantum algorithm utilising entanglement at the two-qubit level on an NMR quantum-information processor* [Online]. Available: http://eprints.iisc.ernet.in/archive/00000300/01/Deutsch.pdf [Accessed 4 July 2004]

Designing Encodings ? 2000, *Designing Encodings* [Online]. Available: http://www.indigosim.com/tutorials/communication/t3s2.htm

Deutsch, D. & Ekert, A. 1998, Quantum Computation, *Physics World*, March

Divincenzo, D.P. 2003, The Physical Implementation of Quantum Computation, *quant-ph/0002077*, vol. 13 April.

Ekert, A. 1993, Quantum Keys for Keeping Secrets, *New Scientist*, Jan 16

Forbes, S. Morton, M. Rae H. 1991, *Skills in Mathematics Volumes 1 and 2*, 2nd edn, Forbes, Morton, and Rae, Auckland.

Gilleland, M. ? 2000, *Big Square Roots* [Online]. Available: http://www.merriampark.com/bigsqrt.htm [Accessed 9 September 2004]

Glendinning, I. 2004, *Quantum Programming Languages and Tools*. [Online]. Available: http://www.vcpc.univie.ac.at/~ian/hotlist/qc/programming.shtml [Accessed 4 July 2004]

Hameroff, S. ? 2003, *Consciousness at the Millennium: Quantum Approaches to Understanding the Mind, Introductory Lectures* [Online]. Available: http://www.consciousness.arizona.edu/Quantum/ [Accessed 30 June 2004]

Hameroff, S. & Conrad, M. ? 2003, *Consciousness at the Millennium: Quantum Approaches to Understanding the Mind, Lecture 6* [Online]. Available: http://www.consciousness.arizona.edu/Quantum/week6.htm [Accessed 30 June 2004]

Jones, J. Wilson, W. 1995, *An Incomplete Education* , ? edn, ?, ?

Knill, E. Laflamme, R. Barnum, H. Dalvit, D. Dziarmaga, J. Gubernatis, J. Gurvits, L. Ortiz, G. Viola, L. & Zurek, W.H. 2002, *Introduction to Quantum Information Processing*

Marshall, J. 2001, *Theory of Computation* [Online]. Available: http://pages.pomona.edu/~jbm04747/courses/fall2001/cs10/lectures/Computation/Computation.html [Accessed 9 August 2004]

McEvoy, J.P. & Zarate, O. 2002, *Introducing Quantum Theory*, 2nd edn, Icon Books, UK.

Meglicki, Z. 2002, *Quantum Complexity and Quantum Algorithms* [Online]. Available: http://beige.ucs.indiana.edu/B679/node27.html [Accessed 7 December 2004]

Natural Theology 2004, *Goedel* [Online]. Available: http://www.naturaltheology.net/Synopsis/s26Goedel.html

Nielsen, M. A. 2002, *Eight Introductory Lectures on Quantum Information Science* [Online]. Available: http://www.qinfo.org/people/nielsen/qicss.html [Accessed 30 June 2004]

Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. 2000, *Quantum Computation and Quantum Information*, 3rd edn, Cambridge Press, UK.

Odenwald, S. 1997, *Ask the Astronomer (Question)* [Online]. Available: http://www.astronomycafe.net/qadir/q971.html [Accessed 30 June 2004]

Rae, A. 1996, *Quantum Physics: Illusion or Reality?*, 2nd edn, Cambridge Press, UK.

Searle, J. R. 1990, Is the Brain's Mind a Computer Program, *Scientific American*, January, pp. 20-25.

Shannon, C. E. 1948, *A Mathematical Theory of Communication* [Online]. Available: http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/paper.html [Accessed 29 April 2006]

Shatkay, H. 1995, *The Fourier Transform - A Primer* [Online]. Available: http://citeseer.ist.psu.edu/shatkay95fourier.html [Accessed 10 December 2004]

Smithsonian NMAH 1999, *Jacquard's Punched Card* [Online]. Available: http://history.acusd.edu/gen/recording/jacquard1.html [Accessed 9 September 2004]

Stay, M. 2004, *Deutsch's algorithm with a pair of sunglasses and some mirrors* [Online]. Available: http://www.cs.auckland.ac.nz/~msta039/deutsch.txt [Ac-

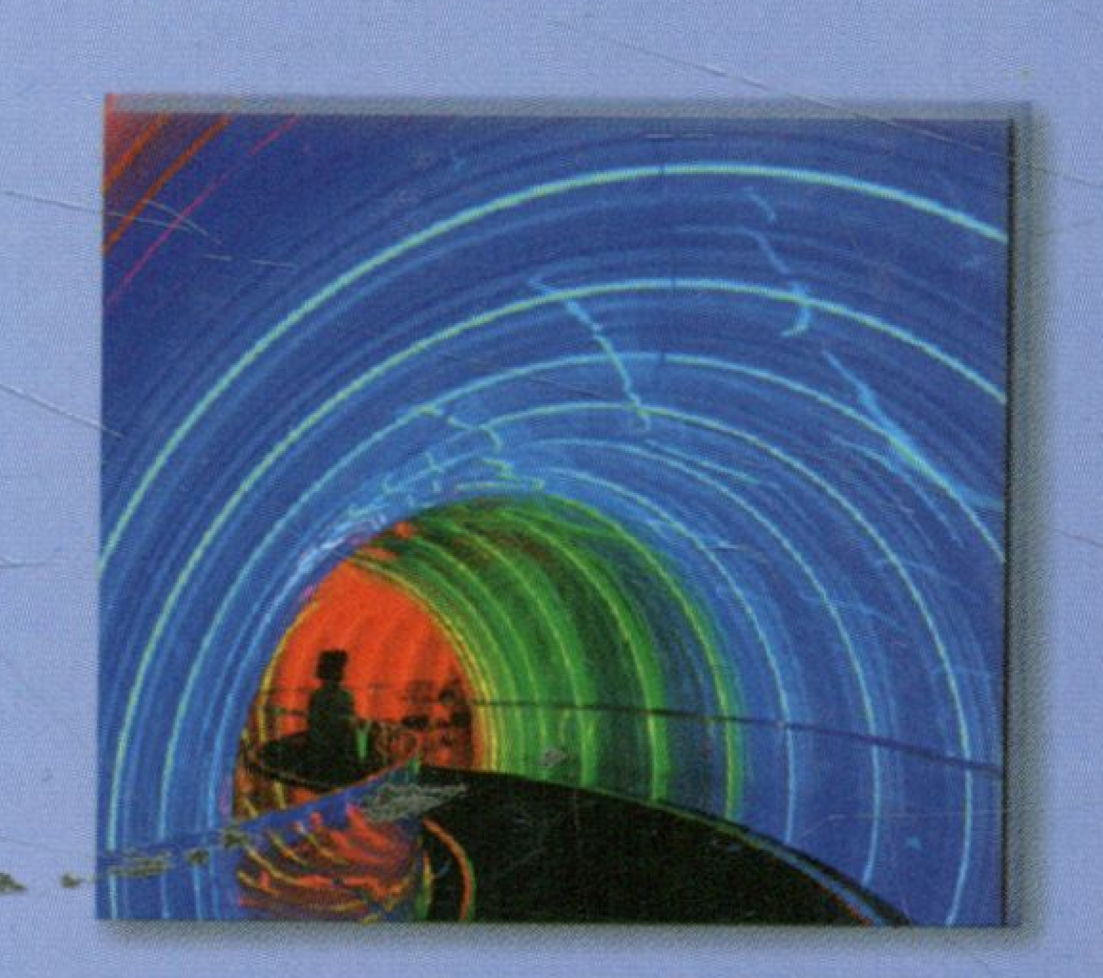
Computing

Quantity

الحوسبة الكمية

يسرنا أن نقدم للقارئ العربي أول كتاب يصدر في وطننا العربي في أحدث موضوع ألا وهو الحاسب الكمي الذي يأمل الباحثون في مختلف بقاع الأرض أن يشكل ثورة حقيقية في عالم الحاسب. الفكرة ببساطة هي استخدام أفكار الفيزياء الكمية لصنع حاسب يختلف كليا عن الكيفية التي يعمل بها حاسب اليوم. أنهم يحاولون صنع حاسب لا وجو د فيه للدارات التكاملية، أو بمعنى أوضح لا وجود لأشباه الموصلات فيه إنما يعمل بالذرات التي ستتشكل البوابات منها. ومن يحكم تصرف الذرات غير الفيزياء الكمية؟!!!

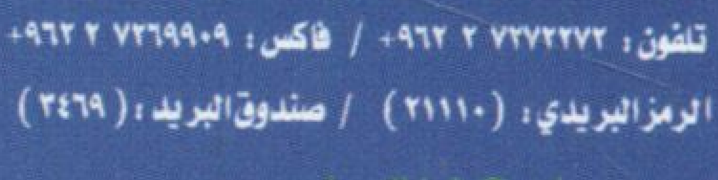
إن معظم الكتب أو البحوث المتعلقة بالحوسبة الكمية تتطلب (أو تفترض) معرفة مسبقة لمجالات معينة مثل الجبر الخطي أو الفيزياء. ويمكننا القول بان معظم المؤلفات المتوفرة حاليا صعبة الفهم لشريحة واسعة من المتحمسين للحاسب الكمي، أو الراغبين فعلا بالحاسب الكمي، إن هذا الكتاب يحاول أن يلامس الحوسبة الكمية من الأساس حتى القمة بطريقة سهلة ومقروءة. إنه يحتوي على الكثير من خلفية الرياضيات والفيزياء وعلم الحاسب التي سوف يحتاجها القارئ.





Halawa Printing Press




تلفون: ٧٢٧٢٢٧٢ ٢ ٩٦٢+ / فاكس: ٧٢٦٩٩٠٩ ٢ ٩٦٢+

الرمز البريدي: (٢١١١٠) / صندوق البريد: (٣٤٦٩)

almalktob@yahoo.com

عالم الكتب الحديث

Modern Book's world

للنشر والتوزيع

الاردن - اربد - شارع الجامعة

www.almalkotob.com


9 789957 708016